

OPTIMIZACIÓN  
DE  
SUSPENSIONES HIDRONEUMÁTICAS  
CON  
AMORTIGUADOR INTEGRADO

TESIS

presentada para la obtención del

GRADO DE DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

por

Salvador Augusto de las Heras Jiménez

Ingeniero Industrial



**UPC**  
BIBLIOTECA RECTOR DON JUAN FERRATE  
Campus Nord

Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Terrassa  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Diciembre 1996

### III. CÁMARA NEUMÁTICA SIMPLE

Una cámara neumática simple es un recinto cerrado monovolumen que contiene gas nitrógeno y cuya función en una suspensión es mantener un nivel de presión en condiciones estáticas que permita suspender la masa del vehículo sobre el suelo.

Ante variaciones del volumen contenedor, ya sea por la variación de la carga estática soportada o la aparición de esfuerzos dinámicos sobre la suspensión, el gas nitrógeno responde cambiando su presión media de forma variante según puede relatarse mediante el empleo de un exponente politrópico y la sencilla relación funcional entre presión interna y volumen de suspensión

$$pV^n = C^{te} \quad \text{[III.1]}$$

Un cambio en la carga estática provoca el desplazamiento de la suspensión hacia otro equilibrio en el que se verifique de nuevo el balance de fuerzas. Tal equilibrio exigirá un cambio de la presión en el interior de la cámara neumática y el consiguiente cambio del volumen contenedor. Aún cuando esta transformación no haya sido isoterma, la suspensión tenderá al volumen correspondiente a la temperatura de trabajo, que proporcione la presión necesaria, siempre que no cambien las condiciones ambientales de presión y temperatura. En algunas circunstancias es conveniente mantener la altura de la suspensión a un nivel constante<sup>1</sup>, por lo que se opta por el uso de suspensiones llamadas *autonivelantes*. Tales suspensiones utilizan por norma general un sencillo ingenio mecánico para inyectar o extraer gas de la cámara neu-

---

<sup>1</sup> Ya se han comentado las ventajas de un sistema autonivelante. Su utilidad es manifiesta en los vehículos de transporte público, en los que es frecuente el cambio de masa suspendida y además han de funcionar inevitablemente durante horas de temperatura ambiente diversa.

mática y así mantener el volumen a expensas de *endurecer* o *ablandar* la suspensión.

En la literatura especializada que trata sobre el diseño y la simulación por computadora de suspensiones hidroneumáticas, algunos investigadores asumen, al calcular la fuerza elástica que el gas realiza en el proceso de compresión, que el cambio es adiabático, isotérmico o sigue un politrópico intermedio en general de índice constante. Aceptar un exponente cualquiera es un grave error pues no existe hasta la fecha consenso sobre su valor exacto y al hacerlo, se desvirtúan importantes y contrastados logros por lo que se refiere a teorías avanzadas de control. El índice politrópico  $n$  depende del modo de compresión y del ratio de intercambio de calor del nitrógeno con los alrededores admitiéndose, de forma cualitativa, que depende de forma directa de la frecuencia y de la velocidad instantánea del proceso, siendo casi isotérmico para velocidades bajas y prácticamente adiabático para altas.

Predecir el comportamiento elástico de una suspensión hidroneumática requiere de un estudio profundo de los procesos de compresión y expansión del gas en el interior de la cámara neumática, no siendo suficiente asumir un exponente politrópico para ambos porque ello representa ignorar la destrucción de energía útil debido a la ocurrencia de irreversibilidades y modelar el gas como un muelle exponencial ideal.

En el presente capítulo se exponen de forma explícita aquellos fenómenos que determinan el comportamiento termodinámico de la cámara neumática simple de una suspensión, en términos del índice politrópico instantáneo del proceso y del resto de las variables de estado termodinámico local que lo definen, derivando las relaciones fundamentales entre éste y el origen y cuantía de las fuentes de entropía existentes. Se complementa el capítulo mediante un estudio pormenorizado sobre los límites inherentes del índice politrópico tanto para gas ideal como real y su interrelación con la constante de tiempo del proceso de intercambio de calor.

### III.1 PRINCIPIOS BÁSICOS DE TRABAJO

La cámara neumática simple de una suspensión acostumbra a tener forma cilíndrica, por lo que el proceso de compresión que en su interior ha lugar puede ser representado por la configuración común cilindro-pistón de la Figura III.1.

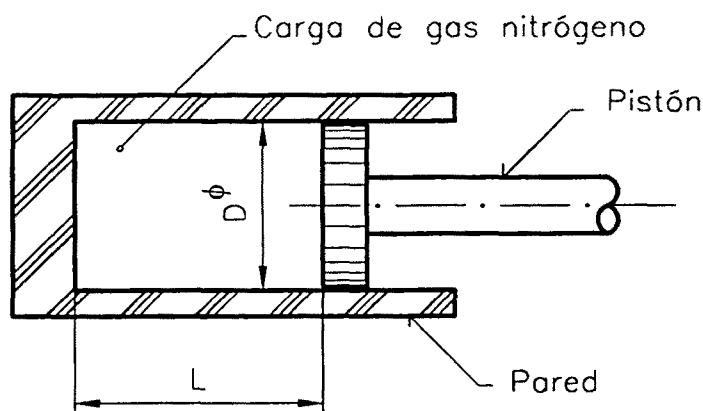


Figura III.1 Configuración Cilindro-Pistón

#### III.1.1 FENOMENOLOGÍA DEL PROCESO DE COMPRESIÓN

Cuando el pistón entra en el cilindro, o lo que es lo mismo, cuando la suspensión se comprime, el gas contenido pierde volumen y aumenta en presión. El trabajo de compresión representa entonces una acumulación de energía observable por el aumento de temperatura del gas, lo que a su vez conlleva la transmisión de calor por convección a las paredes y su comunicación al resto de los materiales que conforman la suspensión<sup>2</sup>. La

---

<sup>2</sup> Resulta evidente, aunque conviene advertir la circunstancia, que tal transmisión de calor no es en absoluto instantánea, sino que ha de venir ineludiblemente afectada por los correspondientes tiempos de retardo o respuesta del fenómeno correspondiente, tiempos que por lo general son función del acoplamiento de los sistemas involucrados y de su capacidad en acumular o retener y comunicar información.

transferencia de calor se realiza a través de una diferencia finita de temperatura por lo que se produce entropía. La fracción de la energía comunicada al pistón para comprimir que es disipada por efecto de la transferencia de calor recibe el nombre de *pérdida térmica*<sup>3</sup>.

Durante la consiguiente expansión del gas el flujo de calor acontece en dirección opuesta al menos en la parte del ciclo en que la temperatura local del gas desciende por debajo de la del contorno. No obstante, tanto la presión como la temperatura media durante la expansión son menores que durante la compresión siendo el área encerrada por la histéresis de la Figura III.2 medida directa de la pérdida de trabajo útil<sup>4</sup>. La presión en las capas de gas próximas al pistón durante la expansión es menor que la media, y durante la compresión mayor. Este proceso es intrínsecamente irreversible y además es interior al gas. La reversibilidad interna se condiciona por la constancia de los parámetros en toda la masa de control.

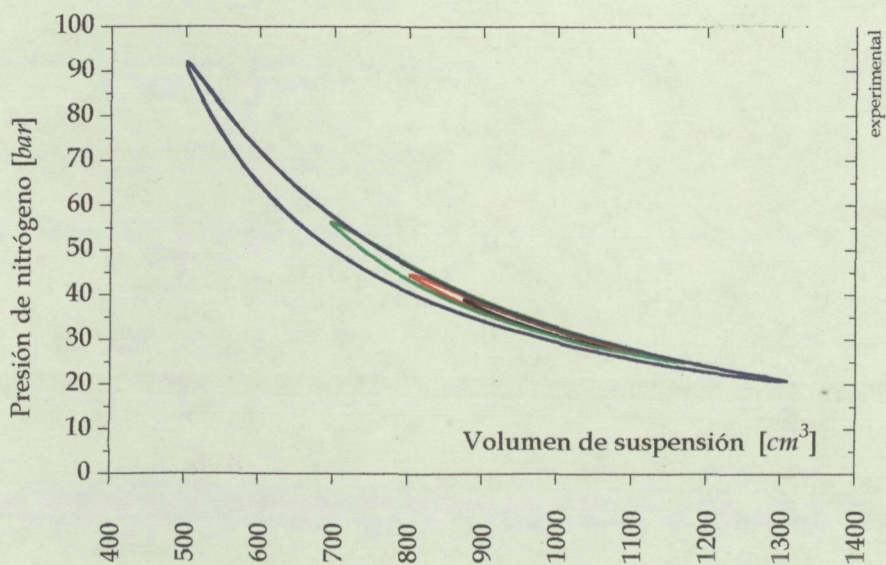


Figura III.2 Gráficos  $p$ - $V$  para ciclos senoidales de trabajo.

<sup>3</sup> En inglés a este concepto se le denomina *thermal loss*.

<sup>4</sup> Es decir, el área encerrada por el ciclo de histéresis constituye una medida directa de las irreversibilidades internas asociadas al proceso de compresión.

La existencia de rozamiento sólido entre las diferentes partes en movimiento relativo conduce siempre a que el trabajo que realiza el gas durante la expansión sea aún menor en valor absoluto al trabajo que se ejerce sobre él. El calor generado por tal pérdida irreversible no alcanza de forma directa al gas, sino que le llega diferido. De hecho, el gas ha de imaginarse su existencia pues lo único que puede percibir es un mayor calentamiento de las paredes que lo contienen. Este rozamiento constituye una *irreversibilidad exterior* al gas que no se ve reflejada por el ciclo de histéresis anterior<sup>5</sup> pero que sí provocará el sobrecalentamiento del conjunto de la suspensión.

Debe insistirse llegado a este punto en que admitir un único coeficiente politrópico para la entrada y la salida del pistón conlleva aceptar que el gas evoluciona sobre una línea sencilla sin pérdidas como si de un muelle ideal<sup>6</sup> se tratara.

### III.1.2 TRANSFERENCIA DE CALOR. CONVECCIÓN NATURAL Y FORZADA

El fenómeno de transferencia de calor para el gas en el interior de acumuladores hidráulicos puede ser descrito, según Elder y Otis [13,Elde], como una combinación entre convección natural y forzada con capas límite inestables y donde es un hecho la transición del flujo de laminar a turbulento en la mayoría de las condiciones de trabajo. Sugiere Otis que los movimientos bruscos del pistón han de inducir reflejos parecidos en el gas que acaban con el desarrollo de turbulencia y remolinos de gran escala. Esto en un principio parece

---

<sup>5</sup> Fíjese el lector que no se afirma que dos suspensiones con diferentes juntas por ejemplo, pero por lo demás idénticas, excitadas ambas con la misma frecuencia y con la misma precarga de gas, hayan de presentar el mismo área de histéresis. Es seguro que en tales condiciones, la mayor presencia de rozamiento en una de ellas la caliente más y ello modifique la característica de transferencia de calor.

<sup>6</sup> Eso sí, además no lineal.

indicar que prevalecería la convección forzada sobre la natural incluso para velocidades lentas de proceso de hasta escasos milímetros por segundo.

En suspensiones hidroneumáticas para vehículos pesados en las que el tiempo característico es bastante elevado y las presiones también, es más correcto aceptar que el transporte térmico se produce por convección natural con una fuerte estratificación y con continuas transiciones entre flujo laminar y turbulento. Esta hipótesis, que como siempre debe ir acompañada por la correspondiente validación experimental, fue también admitida por Otis y Pourmovahed en [37,Pour] cuando desarrollaron su correlación para la constante de tiempo térmica<sup>7</sup>.

Para los tamaños típicos de la cámara neumática, el número de Rayleigh es normalmente superior a  $10^{10}$  por lo que sería de esperar el predominio del flujo turbulento. Ocurre no obstante, que con movimientos cíclicos dicho flujo debe invertir su sentido, y si la frecuencia aumenta, no hay suficiente tiempo como para que las inestabilidades se desarrollen y conviertan en turbulencia. Con estos altos números de Rayleigh el fluido debe moverse confinado en las capas límite sobre las paredes. Esto parece que es lo demostrado por la experiencia según [34,Otis], donde se indica que la estratificación en el interior de la cámara puede consolidarse y provocar un curioso *efecto bombeo* de calor desde la parte inferior a la superior de la cámara con la formación de sendos polos: frío, el superior; y caliente, el inferior.

El proceso en sí es mucho más complejo de lo humanamente atacable con las herramientas actuales. No parece viable definir ni tan solo el movimiento de una partícula de gas en el interior de la cámara neumática, y pretender resolver además la transferencia instantánea de calor cuando el contorno es una de las variables más fuertes del fenómeno. Es por ello que el hombre pensante desarrolla teorías sencillas de utilidad inmediata, rápida y aproximada.

---

<sup>7</sup> En inglés, *the thermal time constant*, modelo que se desarrolla a continuación.

### III.1.3 LA CONSTANTE DE TIEMPO TÉRMICA $\tau$

Aunque el fenómeno de transferencia de calor en el interior de la cámara neumática es harto complejo incluyendo transiciones entre laminar y turbulento, combinación de convección natural y forzada, etc., los cambios de temperatura media y presión internos son semejantes a los debidos a un sistema de primer orden RC<sup>8</sup>. Para un circuito RC básico, se define como tiempo de respuesta o constante temporal del sistema al tiempo requerido para que la salida alcance el 63,2% de la entrada<sup>9</sup> cuando ésta es aplicada de repente. La curva de enfriamiento (o calentamiento) a volumen constante o curva de *relajación* de un gas tras una compresión (o expansión) brusca viene definida por la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_w - T}{\tau} \quad \text{[III.2]}$$

Cálculos teóricos [33,Otis] indican que la máxima pérdida térmica de energía ocurre para ciclos senoidales cuando se verifica la condición

$$2\pi f\tau = 1 \quad \text{[III.3]}$$

La Figura III.3 muestra como la pérdida térmica tiende a cero en los dos extremos: el muy rápido, adiabático; y el muy lento, isoterma.

---

<sup>8</sup> La denominación RC inicialmente se ofrecía a multitud de fenómenos por analogía de sus respuestas con las de un circuito eléctrico formado por una resistencia y un condensador en serie. Tal analogía resulta inmediata para cualquier sistema físico lineal de primer orden si se utiliza la técnica de representación *BondGraph*.

<sup>9</sup> La respuesta de un sistema de primer orden a un escalón es una función exponencial del tipo

$$y = y_0 (1 - e^{-t/\tau})$$



Otis y Pourmovahed [37,Pour], así como Svoboda, Bouchar y Katz [49,Svob] y otros tantos investigadores dedicados al estudio y diseño de acumuladores hidráulicos, han desarrollado diferentes métodos para estimar  $\tau$ . En ninguna de las referencias consultadas existen datos sobre la bondad de los ajustes propuestos sino que sus respectivos autores se limitan a compararse entre ellos. De hecho, la constante térmica es medida siempre mediante curvas de relajación por lo que, dado su carácter instantáneo, el propio método experimental de cálculo es en sí aproximado.

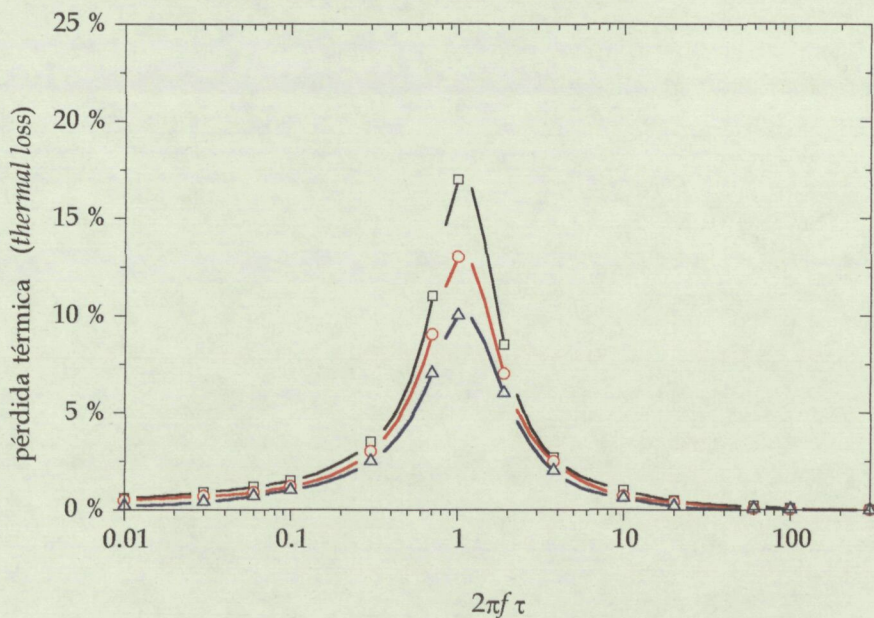


Figura III.3 Pérdida térmica en ciclos senoidales para diferentes presiones de inflado.

Otis desarrolló un modelo sobre la transferencia de calor por convección que utilizaba un balance de energía para el gas, y en el que el calor se calculaba a partir de una correlación experimental para el número de Nusselt hallada por Pourmovahed en su PhD Tesis (1985). Dicha correlación partía del supuesto de que la convección natural era la responsable del proceso y que, por consiguiente, el número de Rayleigh

$$Ra = \frac{\rho^2 g \beta (T - T_p) L^3 c_v}{\mu k} \quad \text{[III.4]}$$

era una variable importante del fenómeno. La temperatura de la pared era incluida en el modelo por el ratio adimensional

$$T^* = \frac{T_p}{T} \quad \text{[III.5]}$$

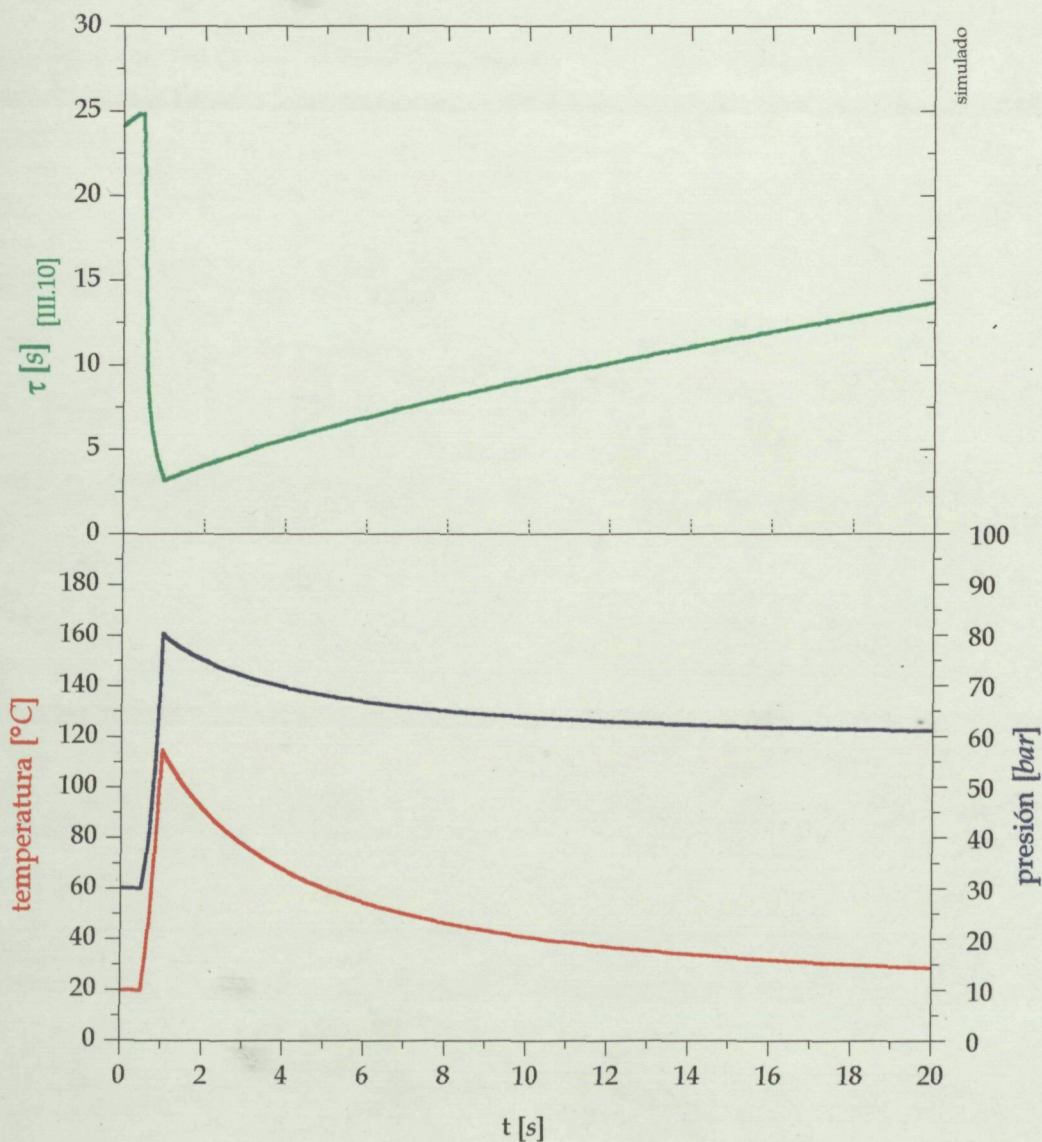


Figura III.4 Curvas de relajación tras una compresión brusca.

Otros parámetros significativos resultaron ser geométricos, como la razón  $L/D$ , o  $F$ , que definido como

$$F = \frac{V}{A_p D} = \frac{(L/D)}{2 + 4(L/D)} \quad \text{[III.6]}$$

pretendía incluir en el análisis el efecto bombeo. Resulta obvio que la influencia de los extremos disminuye al aumentar la razón  $L/D$  por lo que  $F$  tiende a la unidad.

Para obtener una correlación efectiva de la constante de tiempo Otis definió la constante de tiempo térmica adimensional como

$$\tau^* = \frac{k\tau}{\rho c_v L^2} \quad \text{[III.7]}$$

y esperó que fuera una función de los parámetros antes definidos. Así, se obtuvo

$$\tau^* = 0.045 Ra^{-0.260} (D/L) F^{-1.156} T^{*1.170} \quad \text{[III.8]}$$

y

$$Nu = \frac{\alpha_{N_2} L}{k} = 1.6151 Ra^{0.344} F^{1.760} T^{*-2.528} \quad \text{[III.9]}$$

resultados ambos, que combinados con la ecuación [III.4] permiten concluir que

$$\tau = \frac{m_g L \sigma}{1.6151 A_p} F^{-1.760} T^{*2.528} \{ \rho^2 g L^3 (T - T_p) \}^{-0.344} \quad \text{[III.10]}$$

donde

$$\sigma = \left(\frac{c_v}{k}\right)^{0.656} \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^{-0.344} \approx 129.5 \quad \text{[III.11]}$$

Debe tenerse presente que, por definición

$$\tau = \frac{m_g c_v}{\alpha_{N_2} A_p} \quad \text{[III.12]}$$

por lo que  $\tau$  no es en absoluto una constante desde el momento en que el coeficiente de intercambio de calor,  $\alpha_{N_2}$ , y la superficie de pared  $A_p$ , ambos cambian con el tiempo<sup>10</sup>.

Svoboda en 1978 desarrolló un modelo de cálculo de  $\tau$  en el que asume que el proceso de convección natural es similar a la conducción en sólidos. Toma como hipótesis Svoboda que, en promedio, la distribución de temperaturas en el seno del gas debe asemejarse a la de éstos, por lo que usa un coeficiente de conducción térmica entre pared y gas en lugar del correspondiente coeficiente de difusividad. El modelo es válido para geometrías cilíndricas<sup>11</sup>, en las que la temperatura interna sigue una distribución definible mediante funciones de Bessel de primera clase, y pone de manifiesto las deficiencias del sistema lineal RC aunque admite que es una buena aproximación en la mayor parte de ocasiones.

En cualquier caso, tanto el método presentado por Otis como el de Svoboda son aproximaciones del fenómeno, siendo el primero el más sencillo de cálculo y el utilizado aquí para estimar  $\tau$  y el calor comunicado por el gas.

---

<sup>10</sup> Se admite que  $c_v$  es casi constante en el rango de trabajo y se recuerda que la cámara neumática simple es un sistema cerrado.

<sup>11</sup> De hecho las más usuales.

## III.2 FUNDAMENTOS DE TERMODINÁMICA

### III.2.1 EL TRABAJO DE COMPRESIÓN

El gas confinado en la cámara neumática monovolumen constituye un sistema cerrado simple compresible dado que la única interacción de trabajo relevante<sup>12</sup> es el trabajo frontera  $p dV$ . En adelante se denominará como

$$\delta W_{rev}^{gas} = \bar{p} dV \quad \text{[III.13]}$$

al trabajo de compresión o expansión que se realice de forma *cuasiestática*<sup>13</sup> por interacción con el gas. Según lo indicado en III.1.1, la presión en las cercanías del pistón es superior a la media durante la compresión e inferior en la expansión. Es por ello que en la expresión [III.13] se utiliza la presión media del gas como corresponde a un proceso en el que la velocidad del cambio de volumen es diferencial. Las diferencias de presión local respecto a la media corresponden una evidencia del desequilibrio existente en el interior de la cámara. El trabajo frontera real tras un cambio de volumen diferencial resulta ser<sup>14</sup>

$$\delta W^{gas} = p dV \quad \text{[III.14]}$$

---

<sup>12</sup> El postulado de estado indica que ha de ser reversible. En la práctica se toma el número de tipos básicos de trabajo que sobre el sistema se realicen, entendiéndose como básicos a los pertenecientes a las diferentes categorías de conocimiento. Entre ellos por ejemplo, los trabajos elásticos, electrostáticos, magnéticos, gravitacionales o *compresibles*.

<sup>13</sup> Obsérvese como el trabajo se define positivo para la expansión según el sentir propio de la ingeniería.

<sup>14</sup> Este sería el trabajo frontera que detectaría un observador montado sobre la superficie del pistón en contacto con el gas.

donde en esta ocasión,  $p$ , es la presión del gas de desequilibrio en contacto con el pistón<sup>15</sup>. La diferencia entre ambos trabajos es la pérdida irreversible que acontece en el interior del gas.

A la intención del gas de cambiar de volumen se oponen diferentes formas de *fuerzas externas*. Según se indica en la Figura III.5, los efectos exteriores resultan de considerar:

1. La fuerza de suspensión sobre el émbolo,  $F_{ext}$ ;
2. La acción de la presión atmosférica,  $p_{atm}$ ;
3. La fuerza de fricción  $F_f$  resultante del movimiento relativo.

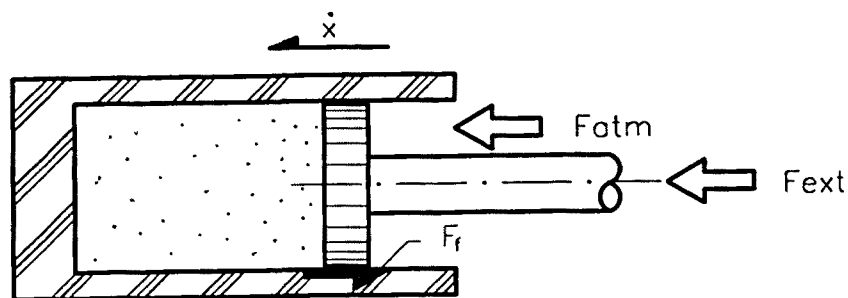


Figura III.5 Fuerzas sobre el sistema cilindro-pistón. Compresión.

<sup>15</sup> Dado que la velocidad de propagación de las ondas de presión es suficientemente mayor que la velocidad de la compresión, debe entenderse que no se deberían detectar diferencias "medibles" entre ambas presiones, por lo que  $p \approx \bar{p}$ . En realidad, el desequilibrio se evidencia en la formación de gradientes de densidad de mayor o menor cuantía en función de la velocidad de la compresión. Admitiendo la constancia de la presión en todo el volumen, se presupone también la existencia de campos de temperatura variable.

La fuerza de suspensión es la resultante del proceso, y realiza un trabajo diferencial calculable de la ecuación

$$\delta W^{ext} = F_{ext} dx + p_{atm} dV = p dV - |F_f dx| \quad \text{[III.15]}$$

en donde el valor absoluto indica la degradación de energía por rozamiento coherente con el segundo principio. Se denominarán  $\delta W_{irrev}^{int}$  y  $\delta W_{irrev}^{ext}$  a las pérdidas de trabajo útil debidas a la ocurrencia de irreversibilidades internas<sup>16</sup> y externas al gas.

No considerar la presión atmosférica en la anterior ecuación no supone un error importante en la praxis de suspensiones para vehículos pesados en los que los niveles de presión son elevados. Sí de concepto, desde el momento en que se trabaja con presiones termodinámicas y ecuaciones de estado.

En el caso de un proceso cíclico, que incluya compresión y expansión del gas, el efecto de la atmósfera es nulo, por lo que el trabajo neto proporcionado durante el ciclo coincide con el trabajo de la fuerza de suspensión

$$W^{ext} = \oint F_{ext} dx = \oint p dV - |W_{irrev}^{ext}| \quad \text{[III.16]}$$

o bien

$$W^{ext} = \oint \bar{p} dV - |W_{irrev}^{int}| - |W_{irrev}^{ext}| \quad \text{[III.17]}$$

---

<sup>16</sup> Las irreversibilidades internas se corresponden con el trabajo de las fuerzas viscosas cuando se deforma el volumen de control. Por unidad de volumen y tiempo, se conoce a este término con el nombre de *función de disipación de Rayleigh*,  $\Phi_V$ .

### III.2.2 LA ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

La experiencia enseña que el suministro de energía a un cuerpo hace que se incremente su energía interna<sup>17</sup>. En condiciones ordinarias para una sustancia compresible, el incremento de energía interna es observable por un aumento de la temperatura y del volumen específico. Esto es así pues, para cualquier sustancia, deben cumplirse las condiciones de estabilidad térmica y mecánica definidas por las relaciones siguientes

$$c_v = \frac{\delta q_v}{dT} > 0 \quad \text{[III.18]}$$

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_T < 0 \quad \text{[III.19]}$$

Es decir, primero, el calor específico a volumen constante es siempre positivo y, segundo, en un proceso isoterma el aumento de presión ocasiona siempre una disminución de volumen. Según el *postulado de estado*, el estado de equilibrio de una sustancia simple homogénea puede determinarse mediante la especificación de dos propiedades independientes e intensivas. Parece pues, que lo más conveniente es expresar la energía interna en forma  $u = u(T, v)$ .

El primer principio de la termodinámica aplicado a la cámara neumática simple se expresa

$$dU + dU_p = \delta Q_{amb} - \delta W^{ext} \quad \text{[III.20]}$$

---

<sup>17</sup> Desde un comienzo se desprecian los términos de energía potencial y cinética del centro de gravedad del sistema. La energía interna considerada incluye, en un punto de vista microscópico, la energía de agitación térmica así como las interacciones moleculares de corto alcance.



donde  $\delta Q_{amb}$  es el calor [ J ] que se evacua al ambiente desde la pared exterior.

Teniendo en cuenta la ecuación [III.17] en forma diferencial, se obtiene

$$dU + dU_p = \delta Q_{amb} - \bar{p} dV + \left| \delta W_{irrev}^{int} \right| + \left| \delta W_{irrev}^{ext} \right| \quad \text{[III.21]}$$

y, como para la pared ha de cumplirse que

$$dU_p = m_p C_p dT_p = -\delta Q_{Otis} + \delta Q_{amb} + \left| \delta W_{irrev}^{ext} \right| \quad \text{[III.22]}$$

resulta, que la ecuación global de la energía interna para el gas se despeja de las anteriores quedando en la forma siguiente

$$dU = \delta Q_{Otis} - \bar{p} dV + \left| \delta W_{irrev}^{int} \right| \quad \text{[III.23]}$$

en donde  $\delta Q_{Otis}$  y  $\delta Q_{amb}$  se toman positivos siempre dirigidos hacia el interior de la cámara.

En un proceso como éste, uno se ve ofuscado por la complejidad y el posible acoplamiento de los fenómenos irreversibles<sup>18</sup>, de forma que pudiera parecer imposible efectuar un planteamiento sencillo con las ecuaciones básicas sin tener que desarrollar una formulación más delicada en función de variables de campo de posición y tiempo. Más adelante se desarrolla el concepto de *equilibrio local* para poder trabajar con variables promediadas espacialmente.

---

<sup>18</sup> Quizás debería decir *reales*.

### III.2.3 IRREVERSIBILIDAD Y DESEQUILIBRIO

El principio de Le Chatelier-Braun indica que si un sistema en equilibrio se aparta de él, los correspondientes parámetros del sistema variarán de tal forma que lo harán retornar al estado de equilibrio. El estado final del sistema no tiene por qué ser el inicial pero lo que sí queda garantizado es que cualquier desviación del equilibrio en uno u otro sentido continuará hasta que éste se restablezca espontáneamente<sup>19</sup>.

Las ecuaciones de la termodinámica clásica se refieren a magnitudes del sistema medibles en equilibrio. Así, las conocidas ecuaciones de Gibbs<sup>20</sup>, y entre ellas la ecuación de la energía interna,

$$du = T ds - p dv \quad \text{[III.24]}$$

se refieren a procesos reversibles, o bien, en su forma incremental,

$$\Delta U = T \Delta S - p \Delta V \quad \text{[III.25]}$$

relacionan las magnitudes entre dos estados de equilibrio sea cual sea el tipo de proceso que condujo de uno a otro. Como la entropía termodinámica no está definida para un estado en desequilibrio, no es posible siquiera definir trayectorias irreversibles en diagramas  $T$ - $s$ , al menos en el sentido más estricto y ortodoxo de la termodinámica clásica<sup>21</sup>.

---

<sup>19</sup> Se entiende que se está refiriendo a variaciones macroscópicas del estado, y no a las fluctuaciones microscópicas estadísticas de las diversas magnitudes termodinámicas.

<sup>20</sup> Para sistemas de masa constante en equilibrio es indiferente el empleo de magnitudes intensivas o extensivas. No obstante, la forma siempre válida de las ecuaciones de Gibbs es la intensiva como se demostrará en el capítulo siguiente.

<sup>21</sup> Una visión más amplia y actualizada usaría la entropía estadística para los procesos irreversibles y así evitaría esta indeterminación.

Para estados no demasiado alejados del equilibrio se acepta que los flujos  $f_i$  de los diferentes fenómenos son funciones lineales de los esfuerzos  $e_i$ . En forma generalizada se escribe,

$$f_i = \sum_j \alpha_{ij} e_j \quad \text{[III.26]}$$

Los coeficientes  $\alpha_{ij}$  se denominan *coeficientes cinéticos*, representando los diagonales,  $\alpha_{ii}$ , los efectos directos, y los no diagonales,  $\alpha_{ij}$ , los efectos de acoplamiento. Se sabe que los flujos y los esfuerzos generalizados pueden ser escalares, vectoriales o tensoriales aunque, según el *principio de Curie*, en un sistema isotrópico sólo se producen acoplamientos entre los transportes cuyas fuerzas impulsoras son tensores del mismo orden o cuya diferencia de órdenes sea par.

La ecuación anterior limita el campo de aplicación de la termodinámica de los fenómenos irreversibles. Onsager demostró que los coeficientes cinéticos podrían ser simétricos, es decir,

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \text{[III.27]}$$

si se efectuaba una elección apropiada de  $f_i$  y  $e_i$ . Al establecer la ecuación de la entropía se verá cómo aparece un término de generación a causa del desarrollo de los distintos fenómenos de transporte en el sistema en su evolución hacia el equilibrio, donde la entropía es máxima. Los flujos y los esfuerzos de cada fenómeno de transporte deben ser escogidos de modo que su producto represente el caudal de producción de entropía debido al fenómeno en cuestión, de forma que, siendo  $T$  la temperatura local, se tenga

$$T \frac{d\Delta s}{dt} = \sum_i T \left[ \frac{\partial s}{\partial t} \right]_i = \sum_i f_i e_i = \sum_i \alpha_{ij} e_j e_i \quad \text{[III.28]}$$

### III.3 APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

A continuación se desarrolla un algoritmo para la evaluación de la temperatura del gas. El método supone magnitudes promedio según el principio de equilibrio local y amplía el modelo que Otis y Pourmovahed [37,Pour] desarrollaron para la constante de tiempo térmica al incluir en el mismo la pérdida irreversible de trabajo útil.

#### III.3.1 PLANTEAMIENTO EN FUNCIÓN DE $\tau$

La ecuación de la energía interna por unidad de tiempo para el gas en un sistema cerrado se escribe, según la ecuación [III.23], de la forma

$$m_g \frac{du}{dt} = \alpha_{N_2} A_p (T_p - T) - p \frac{dV}{dt} + |\dot{W}_{irrev}^{int}| \quad [III.29]$$

en donde no entran en consideración más aportaciones de calor al gas que la convección, y  $A_p$  es la superficie efectiva de pared para la transferencia de calor.

Para un gas real, la energía interna por unidad de masa viene dada por

$$du = c_v dT + \left[ T \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v - p \right] dv \quad [III.30]$$

que combinada con la ecuación [III.29] permite despejar

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = \frac{T_p - T}{\left[ \frac{m_g c_v}{\alpha_{N_2} A_p} \right]} - \frac{1}{m_g c_v} \left[ T \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v \frac{dV}{dt} - |\dot{W}_{irrev}^{int}| \right] \quad [III.31]$$

que puede ser integrada para predecir el cambio de la temperatura del gas.

Es de la ecuación anterior que se define  $\tau$  como se hizo en [III.12]. Con todo,

$$\dot{Q}_{Otis} = \alpha_{N_2} A_p (T_p - T) = m_g c_v \frac{T_p - T}{\tau} \quad [III.32]$$

es el calor de convección, evaluable con  $\tau$  de la ecuación [III.10].

### III.3.1.1 Gas ideal

En un gas ideal, la parcial

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v = \frac{R}{v} \quad [III.33]$$

hace que se simplifiquen las ecuaciones [III.30] y [III.31], tomando éstas la forma

$$du = c_v dT \quad [III.34]$$

y

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = \frac{T_p - T}{\tau} - \frac{1}{m_g c_v} \left[ p \frac{dV}{dt} - \left| \dot{W}_{irrev}^{int} \right| \right] \quad [III.35]$$

### III.3.1.2 Gas real BWR

Tratar al nitrógeno como un gas ideal puede provocar errores apreciables a partir de los 50bar. Afortunadamente, pueden implementarse ecuaciones de gas real en cualquier modelo de ordenador, sin mayores dificultades y con escaso coste de tiempo de cálculo, incluso para una ecuación tan completa como la de Benedict-Webb-Rubin (BWR) de ocho constantes. Acúdase al Apéndice A2 para su consulta.

### III.3.2 AMPLIACIÓN DEL TRATAMIENTO PARA LA PARED

Para la pared del cilindro puede realizarse un balance energético como en la ecuación [III.22], según el cual,

$$\dot{T}_p = \frac{1}{m_p C_p} \left[ -\dot{Q}_{Otis} + \dot{Q}_{amb} + |\dot{W}_{irrev}^{ext}| \right] \quad [III.36]$$

y en el que  $\dot{Q}_{Otis}$  es evaluado por la ecuación [III.32],  $\dot{Q}_{amb}$  por una expresión convencional de la forma

$$\dot{Q}_{amb} = \alpha_{amb} A_{amb} (T_{amb} - T_p) \quad [III.37]$$

en la que  $\alpha_{amb}$  es estimable mediante una fórmula empírica del tipo

$$\alpha_{amb} \langle Gr, Pr, \text{geometría} \rangle \quad [III.38]$$

para la convección forzada alrededor de un cilindro vertical<sup>22</sup>, y  $\dot{W}_{irrev}^{ext}$  ha de estimarse para incluir en el modelo el calor generado por unidad de tiempo a causa del rozamiento seco entre las diferentes partes en movimiento relativo. En el Apéndice A3 se propone un método para su evaluación aproximada. El método utiliza los resultados obtenidos con la suspensión en el banco de ensayos trabajando a ritmo constante<sup>23</sup> para estimar el calor generado mediante la inclusión del coeficiente  $R_f$  de rozamiento, que es resultado de un balance energético hecho sobre la suspensión cuando ésta alcanza el régimen estacionario en el que las temperaturas tras un ciclo retornan a su valor anterior.

---

<sup>22</sup> El aire exterior se mueve alrededor del cilindro de suspensión con una velocidad igual a la del vehículo.

<sup>23</sup> Movimiento de frecuencia y amplitud constante.

### III.4 RELACIÓN ENTRE EL PRIMER Y SEGUNDO PRINCIPIOS

La variación de entropía del gas contenido en la cámara puede ser escrita como la suma de dos términos

$$dS = dS^{\text{int}} + dS^{\text{ext}} \quad [\text{III.39}]$$

donde  $dS^{\text{ext}}$  es la entropía suministrada al gas por sus alrededores y que debe tener en cuenta tanto el intercambio de calor como de masa<sup>24</sup>. Para la cámara neumática simple como sistema cerrado,  $dS^{\text{ext}}$  viene definido por el teorema de Carnot-Clausius como

$$dS^{\text{ext}} = \frac{\delta Q_{\text{Otis}}}{T} \quad [\text{III.40}]$$

donde  $T$  es la temperatura local y absoluta del gas en el lugar donde se realiza la transferencia de calor.

La segunda ley de la termodinámica indica que

$$dS^{\text{int}} \geq 0 \quad [\text{III.41}]$$

siendo tanto mayor cuantas más irreversibilidades ocurran en el interior de la cámara. Las fuentes de entropía internas son reflejo de la viscosidad del gas como contempla la función de disipación de Rayleigh, pues en

$$\Phi_V = \tau_{ij} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{\dot{x}} \right)^2 + \mu_V (\nabla \cdot \vec{\dot{x}})^2 \geq 0 \quad [\text{III.42}]$$

---

<sup>24</sup> Es necesaria esta aclaración pues, como se verá en el capítulo siguiente, para sistemas abiertos ha de incluirse el correspondiente término convectivo.

quedan incluidos efectos como la fricción intrínseca intermolecular en los gases reales, la disipación de energía cinética debida a la formación y destrucción de vórtices<sup>25</sup>, o la expansión libre de un gas<sup>26</sup>. Todos estos efectos disipativos generan calor, de forma que se puede decir que

$$dS^{\text{int}} = \sum_i \left[ \frac{\delta Q_{\text{irrev},i}^{\text{int}}}{T} \right] \geq 0 \quad \text{[III.43]}$$

siendo la determinación de  $\delta Q_{\text{irrev},i}^{\text{int}}$  motivo de la presente y futuras investigaciones.

### III.4.1 EQUILIBRIO LOCAL

En la termodinámica clásica no es necesaria la formulación de los problemas mediante la teoría del continuo puesto que las variables de estado acostumbra a ser funciones independientes de las coordenadas espaciales.

La entropía para sistemas monocomponente es función de dos variables intrínsecas, por ejemplo

$$s = s(u, v) \quad \text{[III.44]}$$

y su diferencial total en equilibrio resulta de la ecuación de Gibbs [III.24]. Cuando un sistema no está en equilibrio, aunque supuestamente no muy

<sup>25</sup> O el flujo a través de orificios con formación de turbulencia. Este es el mecanismo con el que se pretende controlar la generación irreversible interna.

<sup>26</sup> El efecto Joule-Thompson provoca un aumento de entropía de valor

$$ds = -\frac{v}{\mu_{JT}} \frac{dT}{T} = \frac{v}{T} \left| \frac{dT}{\mu_{JT}} \right| \geq 0$$

según ha demostrado el autor.



alejado de él, se dice que se encuentra en *equilibrio local* cuando la entropía viene definida por la misma relación [III.44] como en el equilibrio real, y la entropía total, comparable en magnitud con la de equilibrio, viene definida por la integral extendida al volumen de control

$$S = \int_V \rho s dV \quad \text{[III.45]}$$

En particular se asume que la fórmula [III.24] es válida en equilibrio local aunque su uso debe venir validado por los resultados de la teoría que derive de ella. Es previsible que para estados muy *desequilibrados* se obtengan diferencias notables entre la experiencia y los resultados de la simulación por ordenador, pues entonces la presión, la temperatura y la densidad, no se podrán considerar uniformes en toda la cámara ni como aproximación.

Trabajar con una temperatura promediada espacialmente permite escribir la ecuación [III.43] de la forma

$$T dS^{\text{int}} = \sum_i \delta Q_{\text{irrev},i}^{\text{int}} \quad \text{[III.46]}$$

que con la [III.39] conduce a

$$T dS = \delta Q_{\text{Otis}} + \sum_i \delta Q_{\text{irrev},i}^{\text{int}} \quad \text{[III.47]}$$

la cual indica que el término  $T dS$  es la cantidad de calor total que recibe el gas, ya sea de origen reversible o irreversible, exterior o interior.

La anterior ecuación ha sido obtenida mediante la hipótesis de equilibrio local aunque, de hecho, es rigurosa siempre que se mantengan diferencias de temperatura inapreciables en el interior del gas. Téngase presente, que la temperatura a la que se refiere debe ser la absoluta en *kelvin*, por lo que las diferencias deben ser muy importantes para arruinar el atractivo de [III.47].

### III.4.2 ECUACIÓN DE LA ENTROPÍA

La ecuación [III.47] es en sí misma la ecuación de la entropía para un sistema cerrado como la cámara neumática simple de una suspensión, en la que no existe calor por reacción química y es despreciable el calor por radiación a la temperatura normal de trabajo. Este resultado, que debe estar de acuerdo con [III.28], es obtenible también a partir de la ecuación de la energía interna para la carga de gas. Así, sustituyendo [III.23] en [III.24], con el supuesto de equilibrio local, y arreglando el resultado, se obtiene

$$T dS = \delta Q_{Otis} + \left| \delta W_{irrev}^{int} \right| \quad [III.48]$$

que puede compararse con la anterior para concluir con la igualdad, tácita en muchas ocasiones y demostrada en ésta,

$$\delta Q_{irrev}^{int} = \left| \delta W_{irrev}^{int} \right| \quad [III.49]$$

En la Figura III.6 se representa el sentido de la transformación irreversible de trabajo en calor, que fundamenta el empleo de las *pseudo*-variables de potencia,  $\langle \dot{Q}, T \rangle$ , en BondGraph, en lugar de las reales,  $\langle \dot{S}, T \rangle$ , y que sirve de nexo entre el primer y segundo principios de la termodinámica.

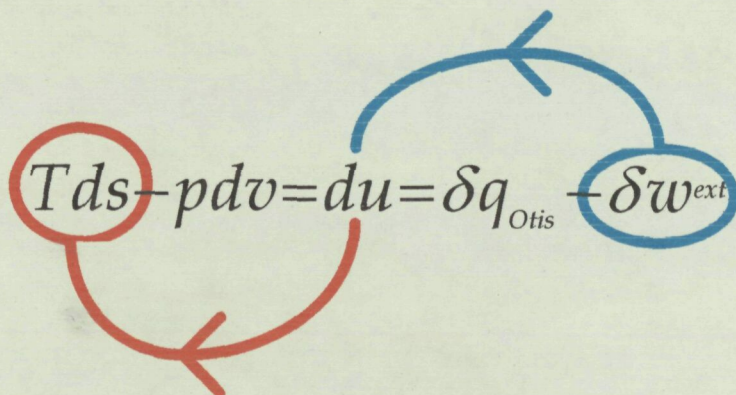


Figura III.6 Visiones interna y externa. Ecuaciones de Gibbs y primer principio.

### III.4.3 DIAGRAMAS DE SANKEY MODIFICADOS

Analizado el acoplamiento existente entre el primer principio de la termodinámica y las ecuaciones de Gibbs, se pasa a mostrar a continuación, siempre bajo el supuesto de que existe equilibrio local en el volumen de control, la relación entre las variables termodinámicas involucradas en las distintas fases del proceso.

La representación gráfica de los fenómenos siempre resulta muy instructiva y esclarecedora. En las figuras siguientes se indican los flujos diferenciales de energía, de trabajo o calor, desde los puntos de vista interno y externo al gas. La similitud de estos diagramas con los de Sankey es aparente, aunque es preciso indicar que en los que aquí se presentan no se barajan magnitudes totales sino diferenciales<sup>27</sup>. Téngase en cuenta además que se trabaja con escalares, por lo que es posible que parezca confuso el uso que se hace de los signos correspondientes a las relaciones teóricas utilizadas. Se insiste en que la masa del sistema es contante en el interior de una cámara neumática simple.

Tras el final de la expansión, la compresión parte de un estado en el que la temperatura del gas es inferior a la del entorno y, en consecuencia, está absorbiendo calor de él. También recibe trabajo frontera con  $\delta w < 0$ , siendo la suma de ambos el incremento de energía interna del gas. El calor proveniente del exterior más la pérdida irreversible de energía útil conforman el término  $Tds$ , que sumado al trabajo de expansión,  $-pdv > 0$ , es de nuevo el incremento  $du$ .

La energía interna del gas se incrementa hasta un instante en el que, en promedio, no se absorbe calor del exterior. El sistema entonces es adiabático aunque, evidentemente, resulte un  $Tds$  no nulo. El estado siguiente depende

---

<sup>27</sup> Lo que parece más acorde con un proceso irreversible en curso

de la característica de transferencia de calor, dando lugar a dos politrópicos distintos, a sendos lados del valor de<sup>28</sup>  $\gamma$ , y en función del signo de  $Tds$ . Se tendrá que el proceso es isentrópico en el caso particular en que se evacue justo el calor irreversible generado. Es correcto afirmar que un proceso adiabático es isentrópico si además es reversible, pero está muy extendida la idea, simplemente errónea, que un proceso isentrópico es de por sí adiabático y reversible.

El final de la compresión indica el comienzo de la expansión con  $pdv > 0$ ,  $\delta w > 0$  y  $du < 0$ . Tras el consiguiente período en el que el gas evacua calor al ser su temperatura aún mayor que la ambiental, se pasa por el instante adiabático que indica la inflexión real del proceso. Mientras en la compresión se tenía que las irreversibilidades restaban trabajo útil incrementando a la vez la energía interna del gas o su temperatura, durante la expansión resulta que acentúan las diferencias locales de densidad al contribuir al aumento del término  $pdv$ . Parece como si la expansión fuera más "desordenada" que la compresión<sup>29</sup>.

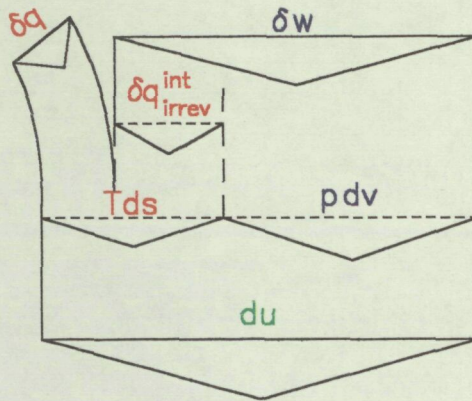
---

<sup>28</sup> Para el gas ideal. En III.5.3 se detalla esta circunstancia.

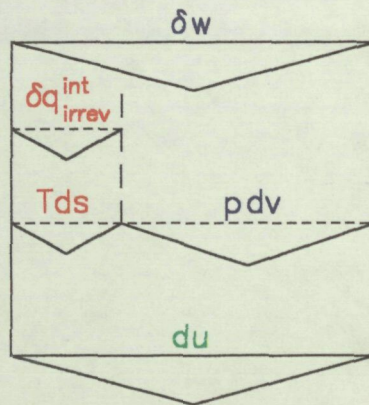
<sup>29</sup> Conjetura personal del autor aún no avalada por la experiencia. Este fenómeno se puede interpretar mediante la siguiente analogía:

Supóngase un grupo de personas encerradas en una habitación. Si súbitamente las paredes de la habitación se movieran en el sentido de reducir el espacio disponible, es de esperar que cada persona intentara mantener su espacio vital obteniéndose en conjunto una distribución de personas por unidad de superficie no muy alejada de la uniforme. Tras esta asfixia, la consiguiente expansión provocará el alivio descontrolado de la "presión" interna al estilo de un *big bang*. Evidentemente este símil, en el más estricto sentido de supervivencia, no puede aplicarse a entidades no conscientes por muy real que parezca.

inicio



adiabático



final

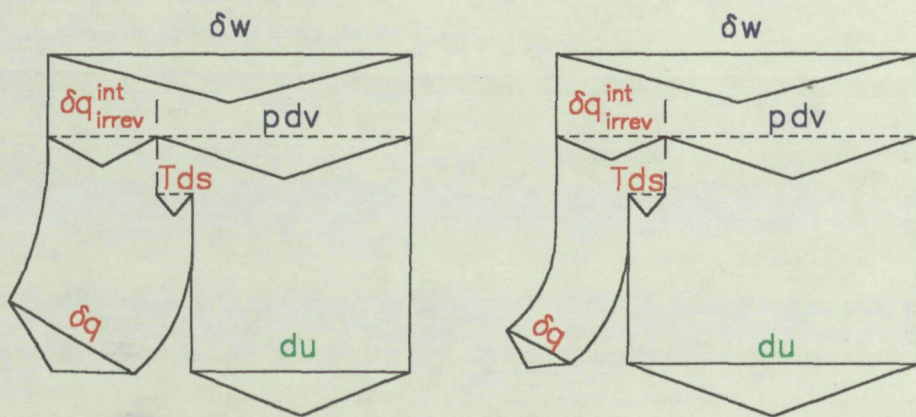
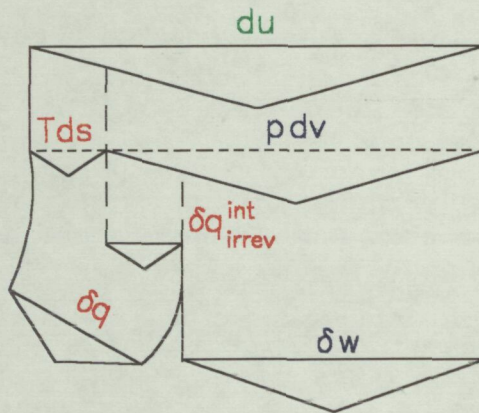
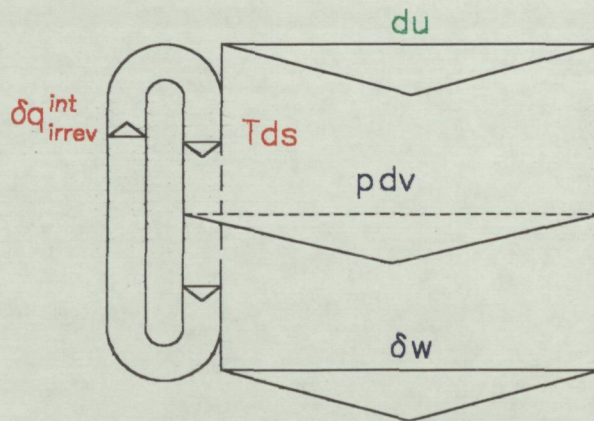


Figura III.7 Diagramas de Sankey modificados para la compresión

inicio



adiabático



final

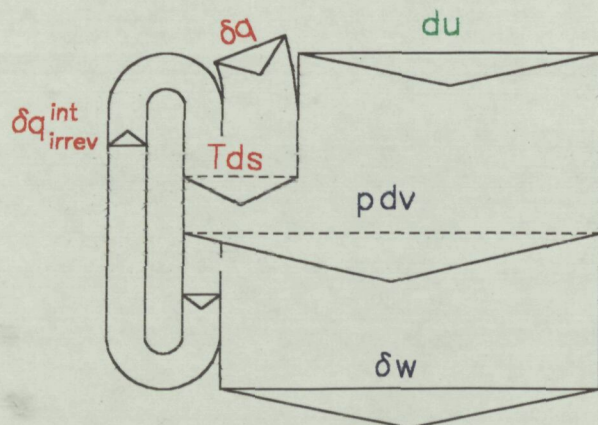


Figura III.8 Diagramas de Sankey modificados para la expansión.

### III.5 EL ÍNDICE POLITRÓPICO, $n$

La relación politrópica de la ecuación [III.1] es una ley útil para estimar el trabajo de expansión por unidad de masa con la expresión

$$w_{12}^{gas} = \int_1^2 p dv = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1 - n} \approx \frac{R (T_2 - T_1)}{1 - n} \quad \text{[III.50]}$$

o calcular el calor total que recibe un gas en el proceso, de acuerdo con la ecuación [III.47], mediante la fórmula

$$\int_1^2 T ds \approx c_v \frac{\gamma - n}{1 - n} (T_2 - T_1) \quad \text{[III.51]}$$

con suficiente aproximación, incluso cuando se trabaje con gases para los que no sea válido el supuesto ideal.

El coeficiente politrópico aparece como una generalización de forma, que, englobando a los casos isentrópico e isoterma para gas ideal como particulares, permite en la práctica estimar las anteriores magnitudes u otras en función de las variables de entrada y salida en turbomáquinas<sup>30</sup>, máquinas térmicas, para ciclos de potencia o de generación de energía. También resulta útil cuando se trabaja con sistemas cerrados de forma que, antes de la aparición de los modelos de cálculo de la constante de tiempo térmica, era el único modo de predecir el comportamiento mecánico de la cámara neumática de una suspensión.

---

<sup>30</sup> Por ejemplo, en compresores, es común utilizar la ecuación [III.51] para calcular el calor generado por rozamiento interno y de esta forma estimar rendimientos. Esto es válido, según [III.47], si el proceso es intrínsecamente adiabático, o bien el tiempo de estancia lo suficientemente corto como para no permitir el natural intercambio efectivo de calor.

Se sabe que el índice politrópico es el ratio que indica la cantidad de calor recibida por el gas en su transcurrir entre los límites de integración<sup>31</sup>. Según la termodinámica clásica, la integral definida en [III.51] no corresponde a ningún área encerrada en un diagrama  $T-s$  pues el proceso será en general irreversible. No es definible una trayectoria entre los límites de integración pues la entropía es una variable de estado definida en equilibrio. Bajo la hipótesis de equilibrio local en cambio, y haciendo uso de la definición de entropía [III.45], es lícito preguntarse si será posible trazar aquella trayectoria irreversible que genere la menor pérdida, o desde otra perspectiva, cuál de entre las posibles es aquella que más energía disipa.

Para la cámara neumática simple no existen muchas alternativas para la generación irreversible. El proceso de compresión para una misma geometría es *predecible*<sup>32</sup>, respondiendo según la frecuencia, carrera y velocidad de la excitación externa. La posible manipulación exterior de las irreversibilidades internas haría que el sistema evolucionara de forma variable para un mismo  $\dot{V}$  según [III.31]. Actuar sobre el rozamiento exterior no tiene efecto directo pues se alcanza al gas de forma diferida.

En este apartado se define un índice politrópico instantáneo, que resulta de acortar la distancia física entre los límites de integración anteriores, y que permite predecir la generación irreversible instantánea en el interior de la cámara. De esta forma, se abre un nuevo campo de actuación en el estudio y desarrollo de suspensiones hidroneumáticas.

---

<sup>31</sup> De hecho se define a partir de [III.51] la capacidad calorífica politrópica como

$$c = c_v \frac{\gamma - n}{1 - n}$$

<sup>32</sup> Y repetible. Partiendo del mismo estado inicial y para una misma excitación, no es de esperar que el sistema evolucione de formas diferentes según el nombre de pila del hacedor de la experiencia. Debe tenerse presente que se habla de una geometría común pues, con la suspensión trabajando, no parece viable cambiar el diámetro interno de la cámara.



### III.5.1 MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL ÍNDICE

A continuación se presentan diferentes formas de calcular el politrópico instantáneo. Las fórmulas que se desarrollan pueden ser utilizadas para el índice experimental o simulado, indicándose en cada caso la conveniencia o limitaciones de su empleo.

La relación de la ecuación [III.1] puede ser escrita como

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n \quad \text{[III.52]}$$

siendo {1,2} dos puntos de la misma trayectoria separados un tiempo  $\Delta t$ . Un instante después, las expresiones [III.1] y [III.52] son correctas en la forma, aunque la constante es diferente al haber cambiado  $n$ .

Las siguientes relaciones pueden ser utilizadas también para describir un proceso politrópico, si se estima que  $p v = R T$  es válida entre {1,2}

$$T_1 V_1^{n-1} = T_2 V_2^{n-1} \quad \text{[III.53]}$$

$$T_1 p_1^{(1-n)/n} = T_2 p_2^{(1-n)/n} \quad \text{[III.54]}$$

#### III.5.1.1 Definición logarítmica clásica

A partir de [III.52], asumiendo que  $n$  es constante entre ambas presiones, puede ser calculado de forma lineal mediante la expresión

$$n = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} \quad \text{[III.55]}$$

o bien de [III.53], o [III.54] por ejemplo

$$n = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}\right)} \quad \text{[III.56]}$$

El cálculo preciso del politrópico implica reducir en lo posible el tiempo  $\Delta t$  que separa {1,2}, lo que supone un inconveniente para estas fórmulas cuando  $V_1 \approx V_2$ , por el cálculo de logaritmos próximos a la unidad en computadoras. Ni el volumen, la presión, o la temperatura absolutas pueden ser nunca negativos por lo que no se presenta indeterminación en este sentido.

### III.5.1.2 Expresiones en derivadas

Derivando respecto del tiempo las expresiones [III.52], [III.53] y [III.54], asumiendo que  $n$  es independiente del tiempo o constante en  $\Delta t$ , se obtienen las relaciones

$$n = 1 - \frac{\dot{T}/T}{\dot{V}/V} = - \frac{\dot{p}/p}{\dot{V}/V} \quad \text{[III.57]}$$

las cuales son fácilmente implementables en cualquier programa de ordenador y cuya conexión con [III.31] es evidente.

### III.5.1.3 Relación de trabajos. Expresión en incrementos

Otro modo de escribir [III.57] es el siguiente

$$n = - \frac{v dp}{p dv} \approx - \frac{v \Delta p}{p \Delta v} \quad \text{[III.58]}$$

el cual, es un resultado curioso que indica que el índice politrópico es el cociente entre los trabajos de compresión y expansión del gas.

La anterior expresión es estrictamente cierta en el límite. Su forma en incrementos no es muy precisa para el cálculo según ha constatado el autor al compararla con [III.55] y [III.57].

Resulta evidente que todas las expresiones precedentes hacen tender  $n$  a infinito cuando el volumen tiende a mantenerse constante. Es conveniente recordar asimismo que aquellas ecuaciones en las que aparece la temperatura o su derivada temporal son válidas sólo para los gases de comportamiento supuestamente ideal.

### III.5.2 LÍMITES NATURALES PARA EL ÍNDICE EN SISTEMAS CERRADOS

Se adelantó en la introducción del presente capítulo que el índice politrópico medio dependía de la frecuencia del movimiento de excitación, indicándose que debería ser casi isoterma para bajas y adiabático para altas. A continuación se demuestra tal afirmación para el gas ideal de un sistema cerrado en compresión cuasiestática.

#### III.5.2.1 Expresión para Gas Ideal sin pérdidas irreversibles

De la ecuación de estado para gas ideal y el primer principio expresados ambos por unidad de masa y tiempo resulta

$$\dot{p}v + p\dot{v} = R\dot{T} \quad \text{[III.59]}$$

$$\dot{q} - p\dot{v} = \dot{u} = c_v \dot{T} \quad \text{[III.60]}$$

que combinadas, y teniendo presente la relación de Mayer, conducen a

$$\dot{q} = \frac{c_p}{R} p\dot{v} + \frac{c_v}{R} \dot{p}v \quad \text{[III.61]}$$

Si la compresión fuera bastante rápida, es decir, la constante de tiempo térmica lo suficientemente grande como para suponer despreciable el calor transportado hacia la pared, entonces el proceso podría considerarse adiabático, y siendo  $\dot{q} = 0$ , de la anterior ecuación se tendría

$$0 = \frac{c_p}{R} p \dot{v} + \frac{c_v}{R} \dot{p} v \quad \text{[III.62]}$$

expresión que arreglada, y teniendo en cuenta la definición [III.57], permite concluir con el resultado

$$n = -\frac{\dot{p}v}{p\dot{v}} = \frac{c_p}{c_v} = \gamma \approx 1,4 \quad \text{[III.63]}$$

Sin refrigeración interna<sup>33</sup>, el isoterma constituye el límite inferior para el politrópico medio puesto que no es posible que el gas evolucione de forma espontánea hacia temperaturas por debajo de la ambiental. Un razonamiento paralelo al anterior implicaría que, con constantes de tiempo térmico bajas, o lo que es lo mismo, con un movimiento de compresión lento y una transferencia de calor activa, no serían apreciables diferencias finitas entre la temperatura del gas en el interior y la temperatura de la capa límite donde prevalece la temperatura de pared  $T_p$ . Por ello,  $\dot{T}$  sería nulo y de [III.59]

$$\dot{p}v + p\dot{v} = 0 \quad \text{[III.64]}$$

que, de nuevo con [III.57], hace  $n = 1$ .

---

<sup>33</sup> Debe entenderse como refrigeración *interna* aquella que extrae calor directamente del gas mientras éste se está comprimiendo. Esta extracción se realiza de forma *externa* al gas, es decir, se fuerza al proceso a evolucionar de forma antinatural.

### III.5.2.2 Relación con la entropía

Para un gas ideal de calores específicos constantes se tiene que la entropía específica viene definida por la igualdad

$$\Delta s = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad \text{[III.65]}$$

que, tras combinar adecuadamente<sup>34</sup> con [III.56], conduce a

$$\Delta s = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) c_p - R \right\} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad \text{[III.66]}$$

Un proceso adiabático con un gas ideal debe ser isentrópico también. De esta forma, si en [III.66] se sustituye  $n = \gamma$  se obtiene

$$\Delta s = \{(c_p - c_v) - R\} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 0 \quad \text{[III.67]}$$

Trabajar con un gas ideal no es suficiente si se pretende evaluar la presión o cualquiera otra variable involucrada en un proceso real. La ecuación de estado induce en la compresión de un sistema cerrado un índice politrópico inferior al real. Esto es así, pues un gas ideal no es más que un agregado de partículas en movimiento aleatorio, en el que las fuerzas intermoleculares y el calor interno generado por rozamiento son despreciables. Para cualquier otro gas<sup>35</sup>, un proceso adiabático no será isentrópico como es bien sabido desde antiguo.

---

<sup>34</sup> El autor reconoce que algunos de los pasos de esta y otras sustituciones no son directos, habiendo sido suprimidos en aras de la continuidad en el desarrollo.

<sup>35</sup> Mejor aún, para cualquier otra ecuación de estado de las denominadas *reales*.

### III.5.2.3 Relación con la constante de tiempo térmica

La Figura III.9 muestra el rango de operatividad del índice politrópico instantáneo para la compresión en la cámara neumática simple. Los resultados son producto de la simulación por ordenador, indicándose en adelante como  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ , el inicio de la compresión y el final de la expansión respectivamente, en aquellos gráficos en los que se represente el índice politrópico.

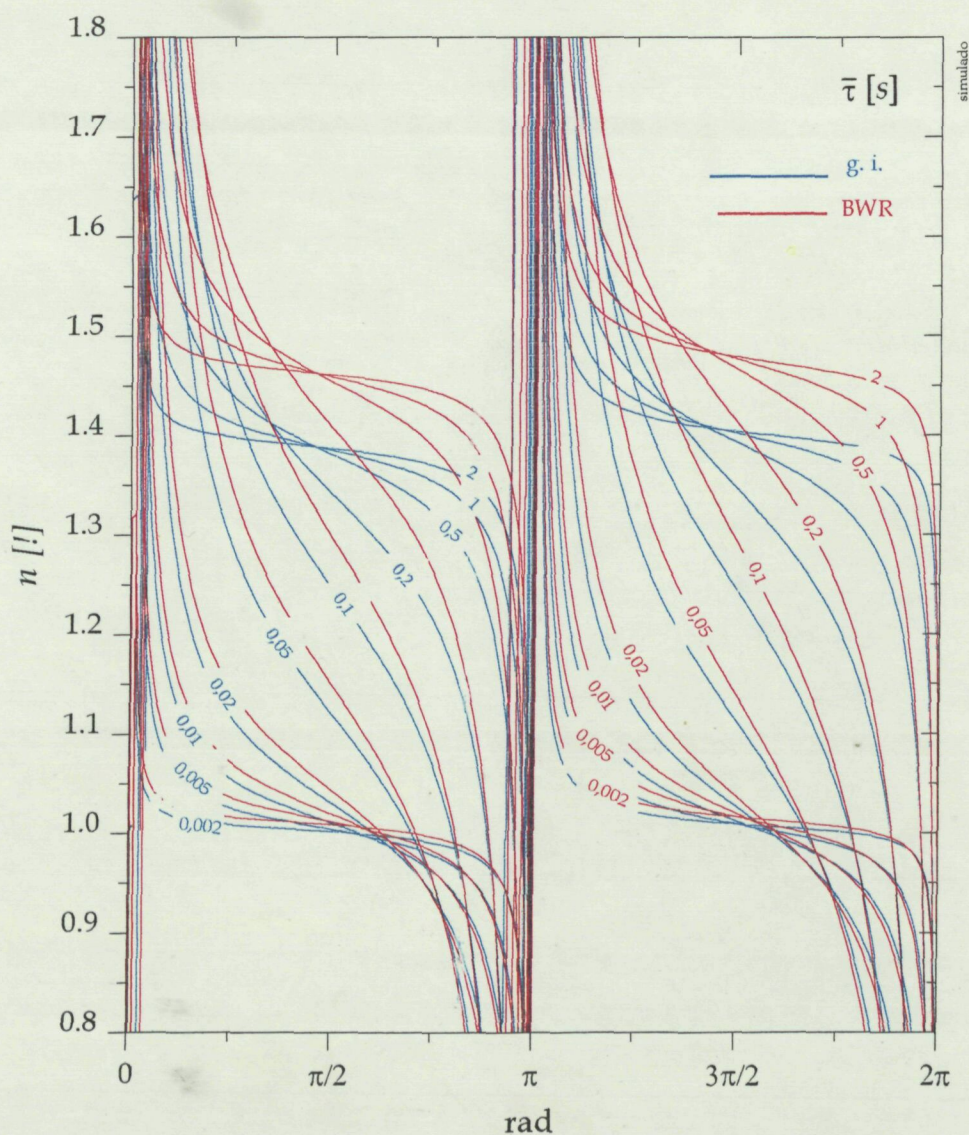


Figura III.9 Evolución del politrópico con gas ideal y BWR, para diferentes valores de  $\bar{\tau}$ .

### III.5.3 CONEXIÓN CON LAS IRREVERSIBILIDADES INTERNAS

Se ha demostrado en III.2.2 que las irreversibilidades de origen interno son las únicas que aparecen en la ecuación de la energía interna para sistemas cerrados. Siendo el politrópico instantáneo función de magnitudes propias del gas, su valor debe ser indicador de la existencia y cuantía de las irreversibilidades internas que se produzcan. A continuación se demuestra esta afirmación, desarrollándose las fórmulas necesarias para su conexión y cálculo.

#### III.5.3.1 Expresión para Gas Ideal

Partiendo de nuevo de la ecuación de estado para gas ideal, más la ecuación de la energía interna de Gibbs [III.24], expresadas ambas por unidad de masa y tiempo resulta

$$\dot{p}v + p\dot{v} = R\dot{T} \quad \text{[III.68]}$$

$$T\dot{s} - p\dot{v} = \dot{u} = c_v\dot{T} \quad \text{[III.69]}$$

junto a la ecuación de la entropía [III.47], en las mismas unidades

$$T\dot{s} = \dot{q} + |\dot{q}_{irrev}^{int}| \quad \text{[III.70]}$$

se llega a la expresión

$$p\dot{v} + \dot{p}v = \frac{R}{c_v} (\dot{q} + |\dot{q}_{irrev}^{int}| - p\dot{v}) \quad \text{[III.71]}$$

Dividiendo por  $p\dot{v}$  y recordando, como se ha demostrado, que  $n = -\frac{\dot{p}v}{p\dot{v}}$ , se despeja de la anterior que

$$n = \frac{c_p}{c_v} - \frac{R}{c_v} \left( \frac{\dot{q} + |\dot{q}_{irrev}^{int}|}{p\dot{v}} \right) \quad \text{[III.72]}$$

La ecuación [III.72] para toda la masa encerrada en la cámara neumática y utilizando la nomenclatura de los apartados anteriores es

$$n = \frac{c_p}{c_v} - \frac{R}{c_v} \left( \frac{\dot{Q}_{Ois} + |\dot{Q}_{irrev}^{int}|}{p\dot{V}} \right) \quad \text{[III.73]}$$

Esta ecuación es lo bastante atractiva como para observarla con un poco de detenimiento. Enseguida salta a la vista su sencillez, resultando obvio que al despejar se obtiene

$$|\dot{Q}_{irrev}^{int}| = (\gamma - n) \frac{c_v}{R} p\dot{V} - \dot{Q}_{Ois} \quad \text{[III.74]}$$

con lo que se ofrece un método para estimar el  $|\dot{Q}_{irrev}^{int}|$  generado por el pistón al comprimir o expandir el gas según un movimiento marcado a voluntad por  $\dot{V}$ . El índice politrópico del proceso se conoce vía experimental, por ejemplo mediante la expresión [III.55] en función de la presión y el volumen instantáneos, y el calor intercambiado se puede calcular en cada salto  $\Delta t$  con un sencillo programa de ordenador haciendo uso de las ecuaciones [III.10], [III.32] y la de estado<sup>36</sup>. No obstante, es útil sólo para gases ideales, por lo que sería conveniente desarrollar una ecuación semejante para gases reales<sup>37</sup> que permitiera hacer la estimación en el campo de altas presiones.

El término de la derecha no puede ser negativo como muestra el valor absoluto de la izquierda. Cuando  $n = \gamma$  el proceso es isentrópico, lo que indica que todo el calor irreversible que se genera es transportado al exterior, como corresponde al criterio de signos adoptado, pues cuando es saliente  $\dot{Q}_{Ois} < 0$ .

---

<sup>36</sup> La temperatura de la pared puede considerarse constante en primera aproximación. El lector convendrá conmigo en que con la ecuación [III.36] no es un problema su cálculo.

<sup>37</sup> Esto se hace en el siguiente apartado a expensas de perder sencillez.



Cuando la suspensión es sometida a ciclos senoidales y se ha alcanzado el régimen estacionario, se cumple que

$$\oint dU = \oint \delta Q_{amb} - \oint \delta W^{ext} = 0 \quad \text{[III.75]}$$

por lo que

$$\oint \delta Q_{amb} = \oint \delta W^{ext} < 0 \quad \text{[III.76]}$$

Este resultado indica que, en promedio,  $\dot{Q}_{Ois}$  será más tiempo negativo con  $\dot{V} < 0$  (en compresión) que positivo con  $\dot{V} > 0$  (en expansión), por lo que se ratifica la validez de los signos de [III.74]<sup>38</sup>.

Volviendo a la ecuación [III.73], obsérvese cómo el límite superior de  $n$  deja de ser  $\gamma$  en presencia de irreversibilidades<sup>39</sup>. Es evidente que si el proceso es adiabático y reversible se obtiene el mismo resultado que en III.5.2.1. En el caso isotermino el cociente entre paréntesis es la unidad con lo que sigue siendo  $n = 1$ .

La relación del índice politrópico con  $|\dot{Q}_{irrev}^{int}|$  hace que puedan obtenerse otras fórmulas para calcular los rendimientos de la compresión o la expansión. Así, suponiendo la no existencia de rozamiento externo para simplificar el tratamiento, el rendimiento de la compresión se define como

$$\eta^c = \frac{p\dot{V}}{\dot{W}^{ext}} = 1 + \frac{|\dot{Q}_{irrev}^{int}|}{\dot{W}^{ext}} \quad \text{[III.77]}$$

---

<sup>38</sup> Además resultará que en la compresión es corriente obtener  $n > \gamma$ .

<sup>39</sup> Este resultado por fin explica que experimentalmente se obtengan  $n \gg \gamma$  como han observado también otros autores, los cuales, aferrados a los límites naturales de  $n$  para el gas ideal *reversible*, justificaban el hecho aludiendo al aumento de valor de  $\gamma$  con la presión y la temperatura. Esto es a todas luces insuficiente según los valores de  $n$  que se encuentran y el valor de  $\gamma$  en la zona de trabajo, como se observa en los gráficos  $T$ - $s$  del Apéndice A1.

y el de la expansión en cambio, como

$$\eta^e = \frac{\dot{W}^{ext}}{p\dot{V}} = 1 - \frac{|\dot{Q}_{irrev}^{int}|}{p\dot{V}} \quad [\text{III.78}]$$

Sustituyendo la ecuación [III.74] en cada una de las anteriores, se obtienen sendas fórmulas para la estimación de rendimientos, medios o instantáneos, para cada uno de los sentidos del proceso. Tras arreglar convenientemente,

$$\eta^c = 1 + (\gamma - n) \frac{c_v}{R} - \frac{\dot{Q}_{Ois}}{p\dot{V}} \quad [\text{III.79}]$$

$$\eta^e = 1 - (\gamma - n) \frac{c_v}{R} + \frac{\dot{Q}_{Ois}}{p\dot{V}} \quad [\text{III.80}]$$

en las que, como ya ha sido dicho, el calor es definido positivo cuando es recibido por el gas.

### III.5.3.2 Expresión para gases reales

Aunque las ecuaciones precedentes, encontradas bajo el supuesto de gas ideal, ofrecen ideas que contribuyen a un mejor entendimiento del proceso de compresión en sistemas cerrados, una cuantificación más precisa de las irreversibilidades conduce *sine qua non* al uso de ecuaciones más complejas que, a riesgo de hacer perder la belleza original de las anteriores, permitan el cálculo exacto de las mismas. Se presenta en este apartado el desarrollo matemático que conduce a la obtención de una ecuación paralela a la [III.73] para gases reales en función del factor de compresibilidad  $z$ .

La formulación más genérica de ecuación de estado se realiza en términos del factor de compresibilidad como

$$pv = zRT \quad [\text{III.81}]$$

que en diferencias es

$$v dp + p dv = z R dT + RT dz \quad \text{[III.82]}$$

El factor de compresibilidad puede ser definido también en función de las condiciones críticas de la forma

$$z = z_c \frac{p_r v_r}{T_r} \quad \text{[III.83]}$$

Como la ley de estados correspondientes indica que  $v_r = v_r(T_r, p_r)$ , entonces debe ser

$$z = z(T_r, p_r) \quad \text{[III.84]}$$

para gases de idéntica  $z_c$ <sup>40</sup>. De esto se entiende que

$$dz = \left[ \frac{\partial z}{\partial p} \right]_T dp + \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_p dT \quad \text{[III.85]}$$

o bien

$$dz = \left[ \frac{\partial z}{\partial v} \right]_T dv + \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v dT \quad \text{[III.86]}$$

Con todo lo anterior, tenemos que en [III.30]

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_v = \frac{zR}{v} + \frac{RT}{v} \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v \quad \text{[III.87]}$$

por lo que

---

<sup>40</sup>  $z_c^{N_2} = 0,292$

$$du = c_v dT + \left\{ \frac{zRT}{v} + \frac{RT^2}{v} \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v - p \right\} dv \quad \text{[III.88]}$$

de donde, con la ecuación de Gibbs [III.24], se puede despejar el incremento de temperatura diferencial

$$dT = \frac{1}{c_v} \left\{ T ds - p \left( 1 + \frac{T}{z} \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v \right) dv \right\} \quad \text{[III.89]}$$

para después sustituirlo en la ecuación [III.82] y así obtener

$$v dp + p dv = \frac{zR}{c_v} \left\{ T ds - p \left( 1 + \frac{T}{z} \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v \right) dv \right\} + RT dz \quad \text{[III.90]}$$

Dividiendo por  $p dv$  y teniendo en cuenta la definición [III.58] del índice politrópico, se puede despejar este último resultando en la forma

$$n = \left[ \frac{c_v + zR}{c_v} \right] - \frac{zR}{c_v} \left\{ \frac{T ds}{p dv} - \frac{T}{z} \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v \right\} - \frac{v dz}{z dv} \quad \text{[III.91]}$$

Calcular  $n$  mediante la fórmula anterior es cuando menos una tarea ardua. El problema no está resuelto aún por cuanto deben calcularse las derivadas parcial y total del factor de compresibilidad que figuran, habiéndose de acudir para ello a tablas, correlaciones de  $z$  o bien ecuaciones de gas real. Puede conseguirse una expresión en derivadas parciales si se encajan en la anterior las ecuaciones [III.86] y [III.89].

Llamándose a

$$z_T|_v = \left[ \frac{\partial z}{\partial T} \right]_v \quad \text{[III.92]}$$

y a

$$z_v|_T = \left[ \frac{\partial z}{\partial v} \right]_T \quad \text{[III.93]}$$

para simplificar la apariencia, el resultado de la operación es

$$n = \left[ \frac{c_v + zR}{c_v} \right] - \frac{zR}{c_v} \left( 1 + \frac{T}{z} z_T|_v \right) \frac{T ds}{p dv} - \frac{v}{z} z_v|_T + z_T|_v \left\{ \frac{RT}{c_v} \left( 2 + \frac{T}{z} z_T|_v \right) \right\} \quad \text{[III.94]}$$

que, aunque más extensa, es de cálculo más sencillo.

Recordando de nuevo la ecuación de la entropía [III.47], el calor irreversible que se genera por segundo puede ser despejado de la anterior, quedando [!]

$$|\dot{Q}_{irrev}^{int}| = \frac{\left[ \frac{c_v + zR}{c_v} - n \right] - \frac{v}{z} z_v|_T + z_T|_v \left\{ \frac{RT}{c_v} \left( 2 + \frac{T}{z} z_T|_v \right) \right\}}{\frac{zR}{c_v} \left( 1 + \frac{T}{z} z_T|_v \right)} p \dot{V} - \dot{Q}_{Ois} \quad \text{[III.95]}$$

Evidentemente, estas fórmulas coinciden con las [III.73] y [III.74] para gas ideal, si se tuviera  $z = 1$  y todas las parciales se anularan.

### III.5.3.3 Expresión rápida. Arreglo para ordenador

El factor de compresibilidad  $z$  y las derivadas parciales  $z_T|_v$  y  $z_v|_T$  para el gas real pueden calcularse directamente de la ecuación de estado BWR o de cualquier otra que se estime precisa. En la Figura III.10 se representan los resultados obtenidos al hacer uso de la ecuación de estado de Aungier [4,Aung] incluida en el Apéndice A2. La ecuación de Aungier es una modificación de la conocida Redlich-Kwong pero que no adolece de su debilidad en

la vecindad del punto crítico. Según la referencia, el máximo error que se comete al estimar la presión del nitrógeno hasta los 96bar es del 1.36%, por lo que el error al calcular  $z$  o sus derivadas ha de ser del mismo orden. El factor de compresibilidad que resulta de la ecuación de estado de Aungier es

$$z = \{p\} \frac{v}{RT} = \frac{v}{(v - v_c) + A} - \frac{B}{(v + b) T_r^{m+1}} \quad \text{[III.96]}$$

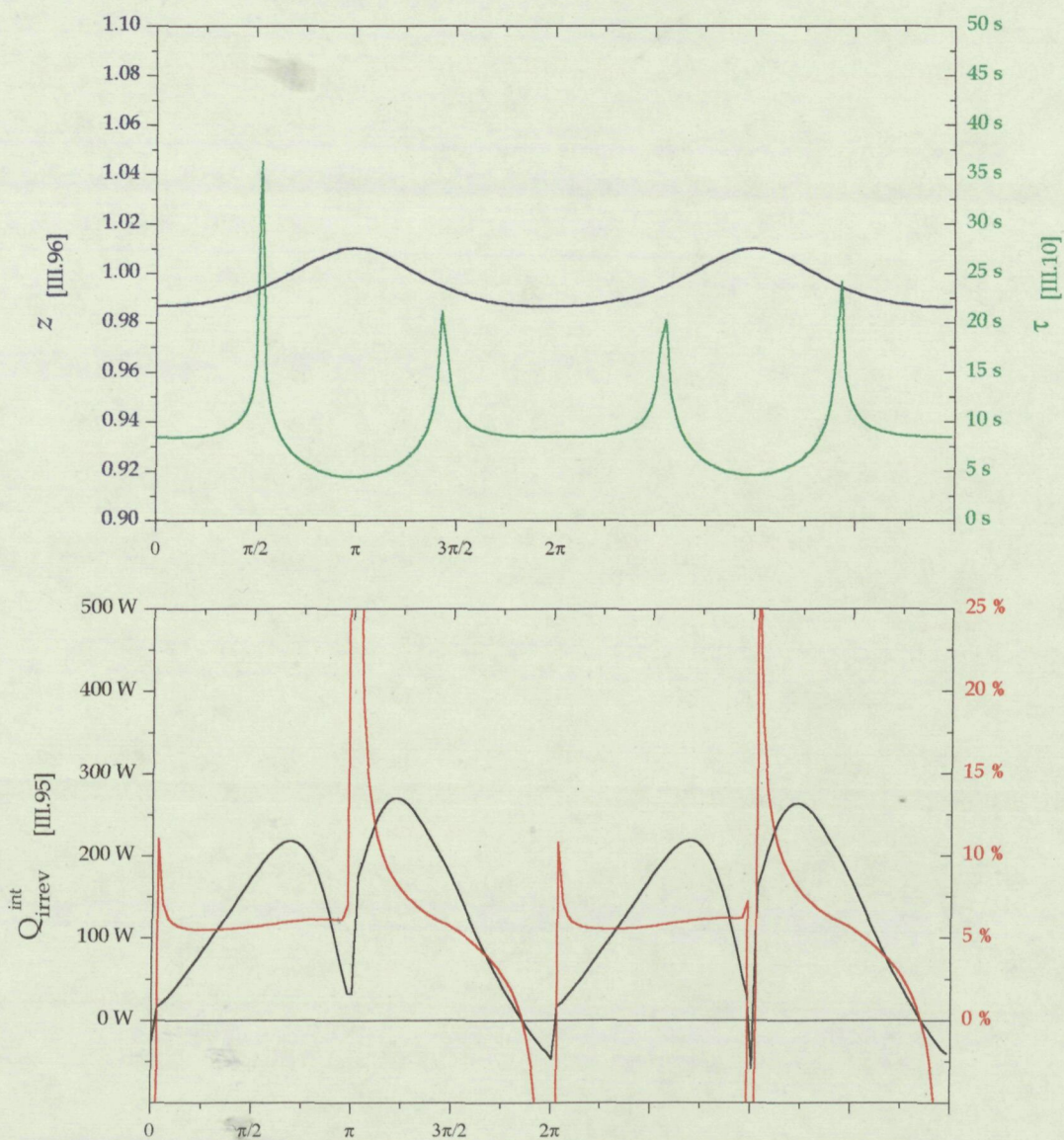


Figura III.10 Pérdida irreversible y otras variables para ciclos senoidales a 0,5Hz

### III.5.4 GENERACIÓN DE LÍNEAS ISOTRÓPICAS. GRÁFICO T-S

Por lo visto hasta el momento, el índice politrópico se ha revelado como una herramienta útil para el cálculo de las pérdidas irreversibles instantáneas que se producen en el sistema, cuando éste se desplaza del equilibrio siguiendo una determinada trayectoria. En un diagrama T-s, cada punto tiene un conjunto de valores  $\langle T, s, p, \rho \rangle$  que definen su *estado termodinámico*. Ahora se puede afirmar que dicha trayectoria, marcada en el diagrama T-s por una pendiente que se denominará  $j$ , posee un único politrópico característico en cada punto que definirá el *estado de proceso*  $\langle j, n \rangle$  del sistema. A las trayectorias que siguen un mismo politrópico se llamarán *isotrópicas* y su determinación analítica se ofrece a continuación.

Partiendo de las relaciones  $T ds$  siguientes

$$T ds = c_v dT + \frac{\alpha T}{K_T} dv \quad \text{[III.97]}$$

$$T ds = c_p dT - \alpha v T dp \quad \text{[III.98]}$$

se tiene que

$$\frac{ds}{dT} = j = \frac{c_v}{T} + \frac{\alpha}{K_T} \frac{dv}{dT} = \frac{c_p}{T} - \alpha v \frac{dp}{dT} \quad \text{[III.99]}$$

de donde, arreglando con [III.58]

$$\frac{j - \frac{c_v}{T}}{j - \frac{c_p}{T}} = \frac{-\alpha dT}{\alpha v K_T dT} \frac{dv}{dp} = \frac{1}{K_T p} \frac{1}{n} \quad \text{[III.100]}$$

expresión de la que se despeja

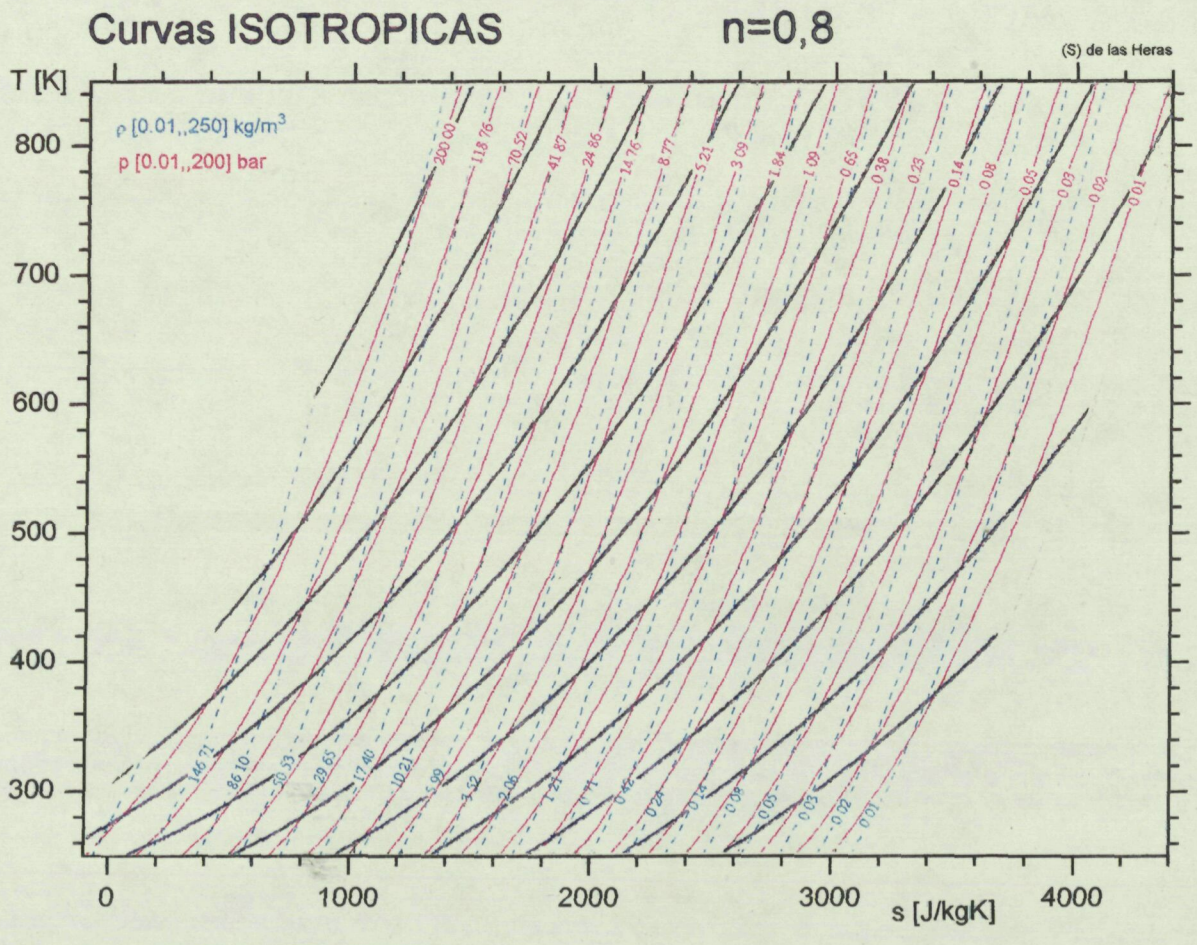
$$j = \frac{ds}{dT} = \frac{c_v}{T} \frac{p K_T n - \gamma}{p K_T n - 1} \quad \text{[III.101]}$$

y

$$n = \frac{1}{K_T p} \frac{T_j - \gamma}{T_j - 1} \quad \text{[III.102]}$$

Para gas ideal, las fórmulas anteriores se simplifican más al ser  $K_T p = 1$ , lo que permitiría dibujar las curvas isotrópicas de forma rápida y precisa<sup>41</sup>.

Los gráficos que se muestran a continuación han sido obtenidos con la ecuación [III.101] mediante el programa de ordenador que se incluye en el Apéndice A4. Se utilizaron las propiedades de gas real,  $K_T, c_v$  y  $\gamma$ , que resultaron de ajustar los datos del nitrógeno de la NBS [21,N<sub>2</sub>], en función de la presión y temperatura absolutas, según se especifica en el Apéndice A1.



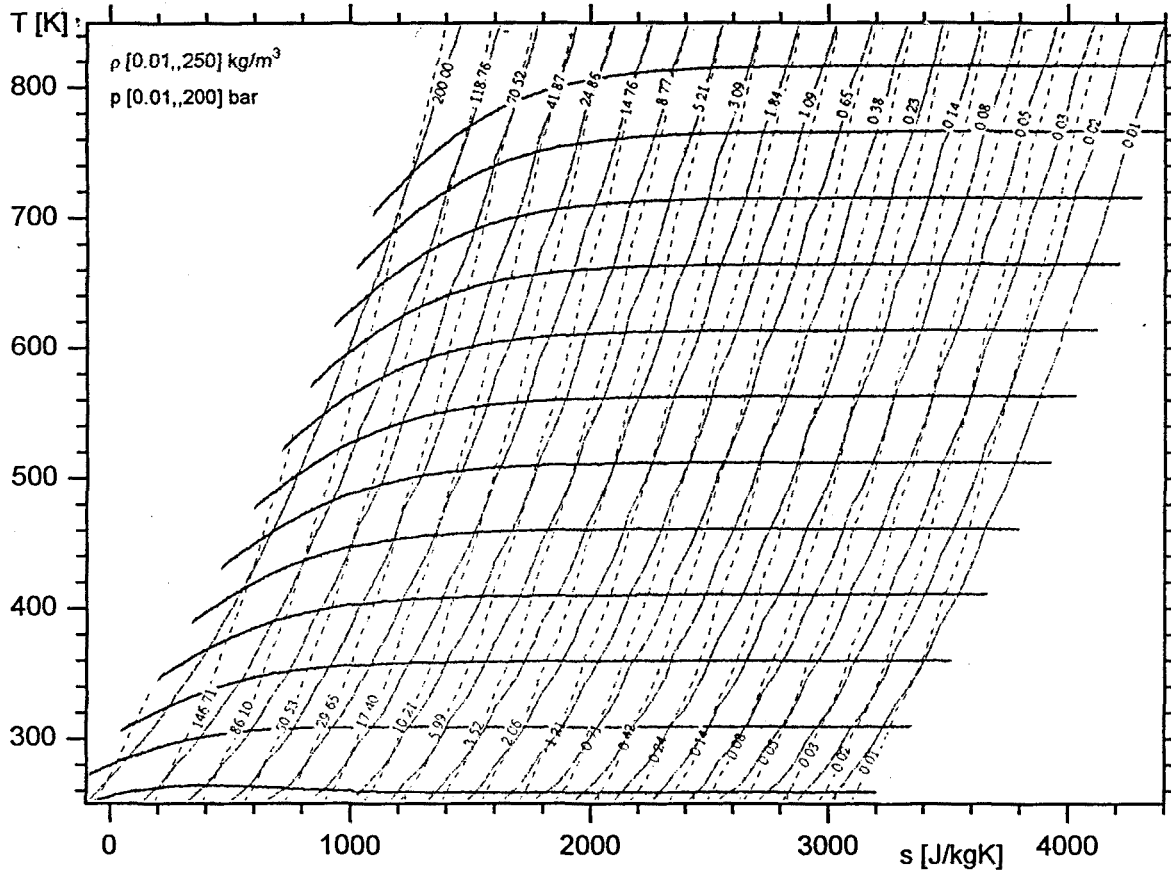
<sup>41</sup> Obsérvese no obstante, como las líneas isotrópicas no son rectas ni para el gas ideal, dada su dependencia de la temperatura.



Curvas ISOTROPICAS

$n=1,0$

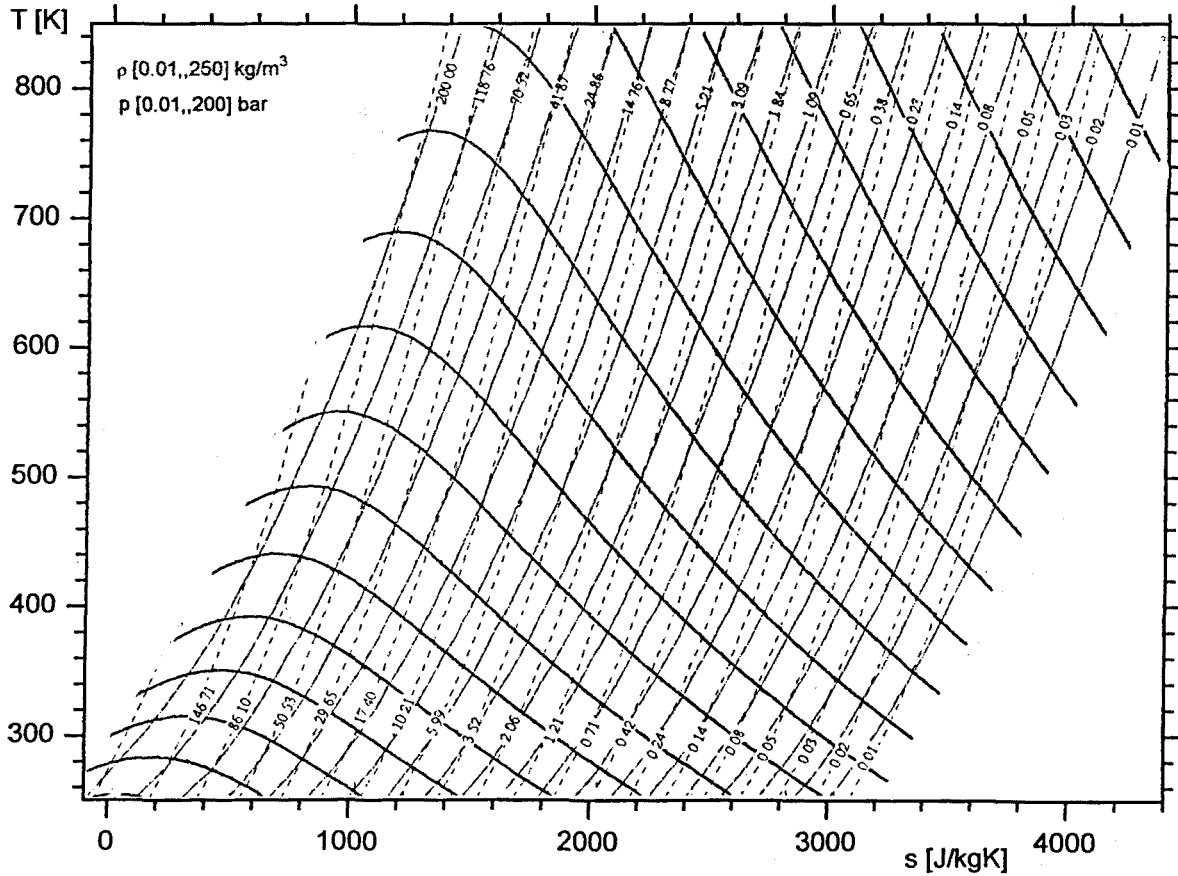
(S) de las Heras



Curvas ISOTROPICAS

$n=1,1$

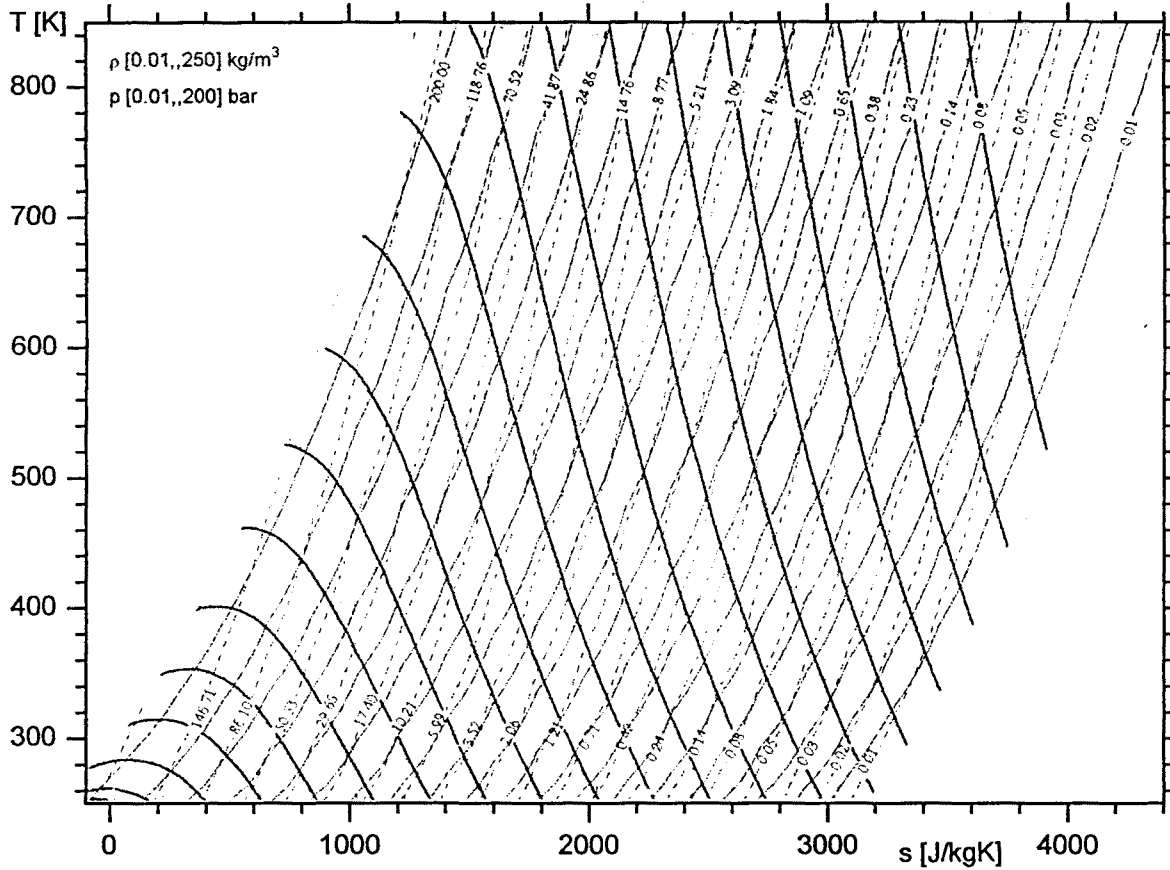
(S) de las Heras



# Curvas ISOTROPICAS

## n=1,2

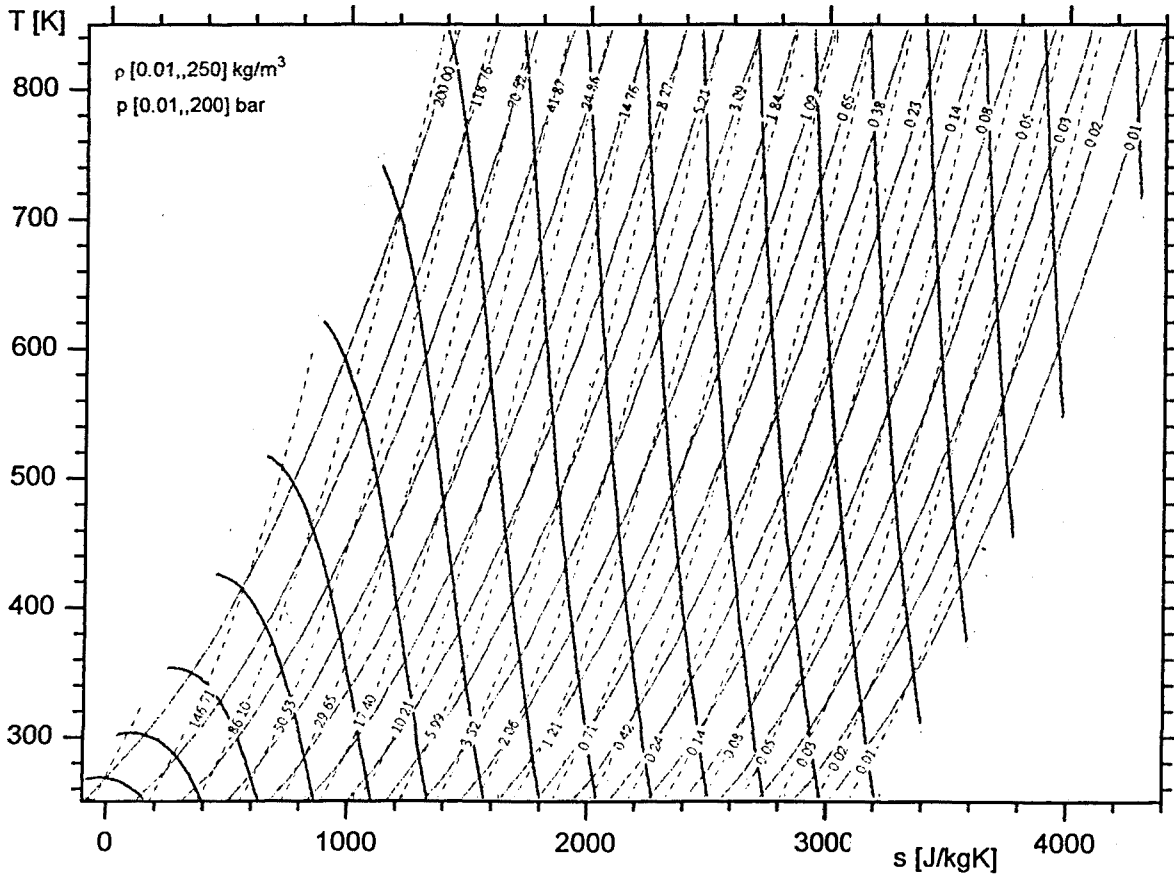
(S) de las Heras



# Curvas ISOTROPICAS

## n=1,3

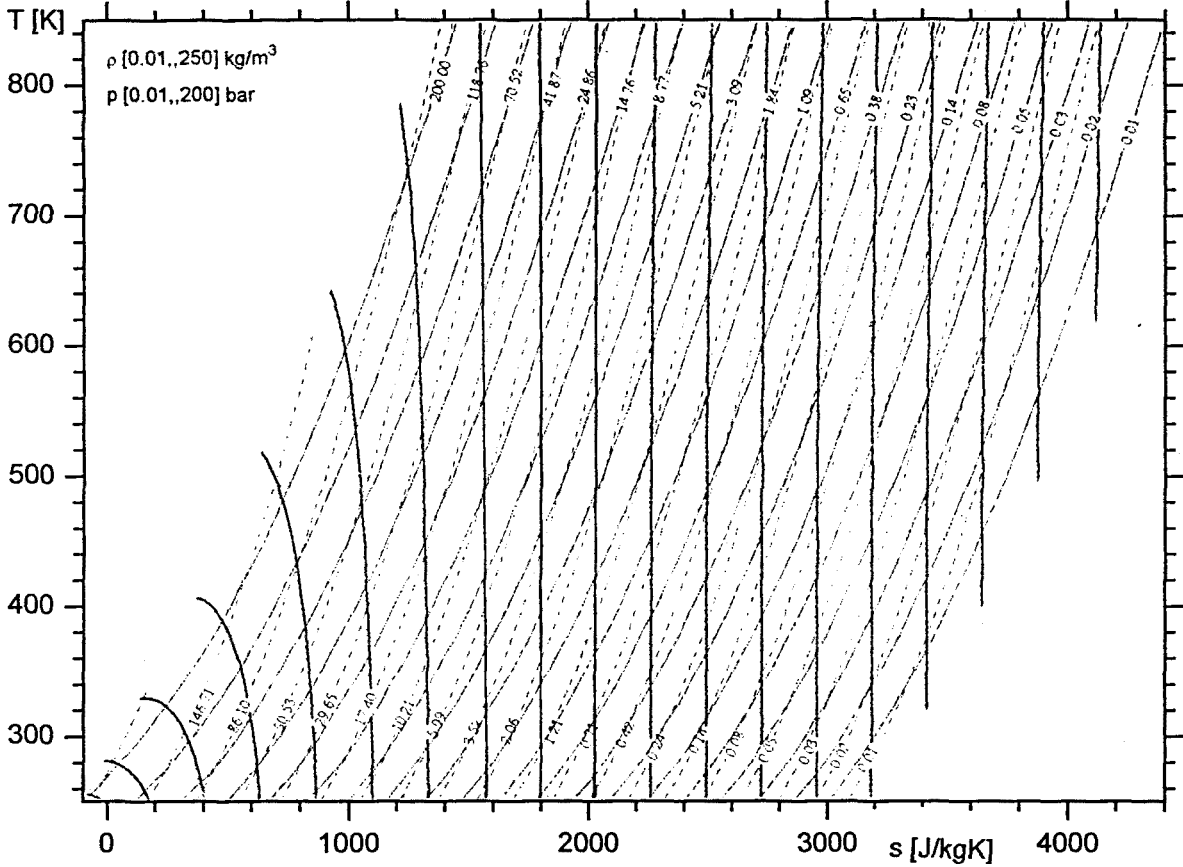
(S) de las Heras



# Curvas ISOTROPICAS

n=1,4

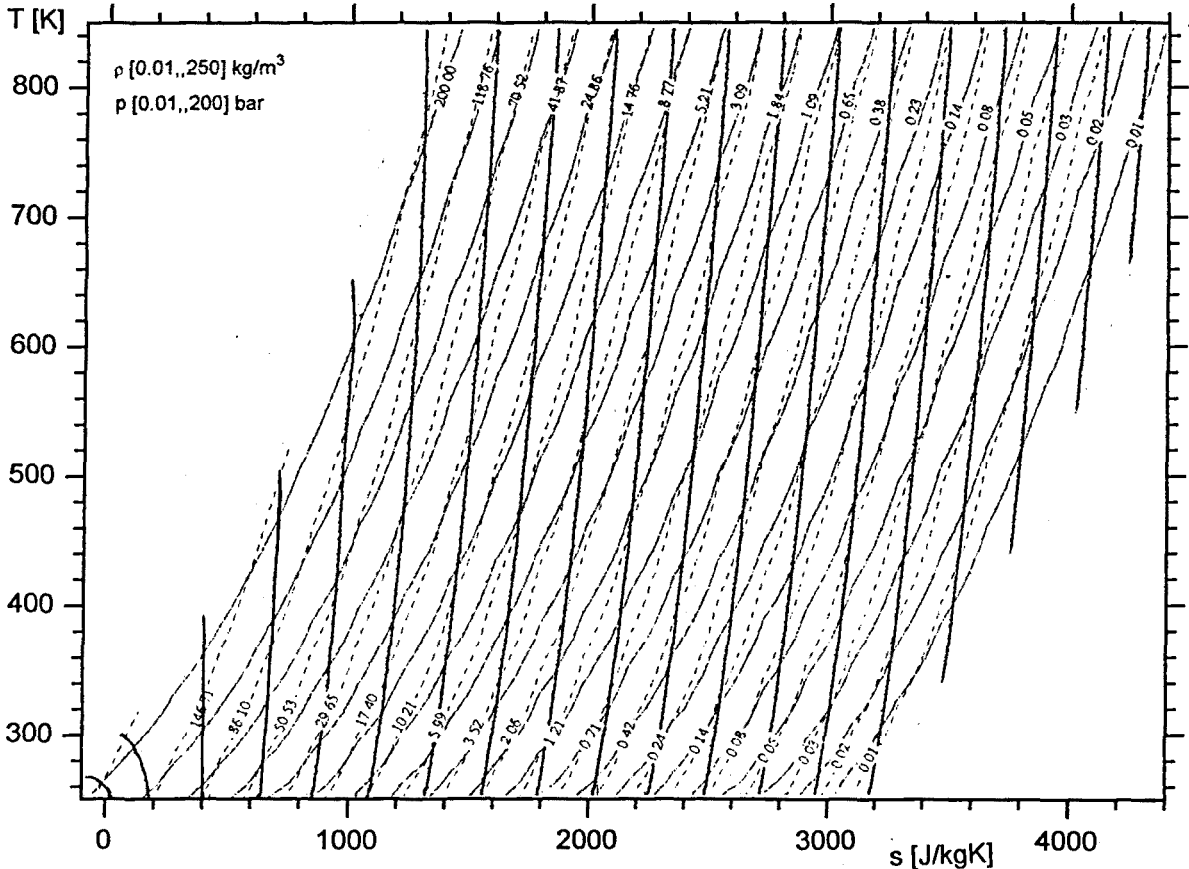
(S) de las Heras



# Curvas ISOTROPICAS

n=1,6

(S) de las Heras



### III.6 RESUMEN DEL CAPÍTULO

Las suspensiones hidroneumáticas presentan por lo general una configuración de cámara neumática simple, cuyas propiedades mecánicas se acostumbra a describir en la literatura consultada mediante una ecuación politrópica como [III.1]. El método de trabajo más extendido consiste en aceptar que la evolución de la presión en función de la carrera sigue una expresión del tipo

$$p = p_0 \left( \frac{L_0}{L} \right)^n \quad \text{[III.103]}$$

que permite calcular la fuerza de suspensión total como

$$F_S = (p_0 - p_{atm}) A_S + p_0 \left\{ \left( \frac{L_0}{L} \right)^n - 1 \right\} A_N + C_S \dot{L} \quad \text{[III.104]}$$

Ocurre que hasta la fecha no existía consenso sobre el valor exacto del índice politrópico, por lo que la ecuación anterior puede no ofrecer resultados muy acordes con la realidad dado que el error al estimar  $n$  crece exponencialmente al calcular  $p$ . Sí se admitía tácitamente su dependencia del ratio de calor recibido por el gas, de la frecuencia y de la velocidad de la compresión o la expansión, pero en ningún caso se había cuantificado tal relación o encontrado un método analítico o por simulación que la previera. Como en la mayor parte de ocasiones el proceso es bastante rápido, se tendía a considerar<sup>42</sup>  $n = \gamma$ , al entenderse que éste era el límite superior de  $n$ .

En este capítulo se demuestra que la relación de calores específicos,  $\gamma$ , es el límite superior para el politrópico medio del proceso, y el máximo alcanzable,

---

<sup>42</sup> Aunque también es corriente encontrarse referencias con exponentes menores.

siempre que éste sea adiabático e internamente reversible, es decir, no exista ningún tipo de rozamiento interno y, en consecuencia además, se trabaje con gas ideal. Cualquier irreversibilidad de carácter interno contribuye a aumentar el valor de  $n$  al aportar más calor al gas y de esta forma, es evidente<sup>43</sup> cómo se modifica [III.103]. La expresión [III.72] para el gas ideal, y la [III.94] para el gas real, ambas deducidas por primera vez en esta Tesis Doctoral, justifican que el valor experimental del índice politrópico supere en muchas ocasiones el valor de  $\gamma$ , aún cuando se utilicen para su estimación propiedades reales del gas.

Actuar sobre las irreversibilidades internas permitiría modificar  $n$  y, en virtud de la ecuación [I.46], también la rigidez dinámica de la suspensión. Esta idea será desarrollada en extensión en el Capítulo IV, donde se presenta un método sencillo para su puesta en práctica. Es precisamente la relación entre el índice politrópico instantáneo, la rigidez neumática y las irreversibilidades internas, la que ha forzado al estudio exhaustivo de la termodinámica asociada al proceso de compresión, desde los plantamientos reversible e irreversible, para poder preparar un modelo completo que permita obtener la evolución de las variables termodinámicas,  $p$ ,  $T$ ,  $v$ , y así predecir el comportamiento mecánico de la suspensión. Como el índice  $n$  instantáneo depende también de la transferencia de calor con la pared interna del contenedor, fue necesario encontrar un procedimiento fiable para su cálculo. De entre los encontrados en la literatura especializada en acumuladores hidroneumáticos, se prefirió el modelo de la constante de tiempo térmica desarrollado por Otis por su sencillez y ajuste coherentes.

Con este planteamiento, el índice politrópico deja de ser una entrada del modelo pues las características mecánicas de la suspensión dependen de su

---

<sup>43</sup> En este sentido, es curioso observar cómo conceptos que se sobreentienden son tratados por norma general con superficialidad, facilitando que otros puedan permanecer ocultos e incluso que los primeros no sean bien entendidos. De hecho, que algo sea de uso habitual no implica que sea dominado, ni mucho menos.

valor y, además, ya no es necesario para estimar la evolución de la presión con [III.103] o el resto de las variables involucradas en el proceso. Comparando su valor experimental con el simulado podría contrastarse la bondad de cualquier algoritmo de cálculo, tal como se hace en esta Tesis Doctoral.

## IV. CÁMARA NEUMÁTICA DISCONTINUA

Una cámara neumática es discontinua cuando está formada por dos o más depósitos de dimensiones grandes en comparación con el conducto que los conecta entre sí. Cada uno de estos depósitos puede ser de volumen constante o variable, pudiendo estar sujetos a la acción de fuerzas externas aplicadas sobre los respectivos pistones. En la Figura IV.1 se muestra un sistema discontinuo de dos cámaras: una, de volumen variable, a la que en adelante se llamará (1); y otra, de volumen constante, a la que se llamará (2).

El sistema total formado por ambas cámaras es cerrado pues no se presenta intercambio de masa con el exterior. No obstante, cada uno de los subsistemas en que está formado es un sistema abierto que intercambia masa y calor con el otro. Sobre la cámara (1) puede realizarse trabajo frontera tal como se definió en [III.14], siendo ésta la única interacción de trabajo con el exterior para el sistema global. En principio, no hay razón para excluir el intercambio de calor de cada cámara con el exterior, de forma que se calcule por separado haciendo uso de las ecuaciones [III.10] y [III.32] para las variables de cada una.

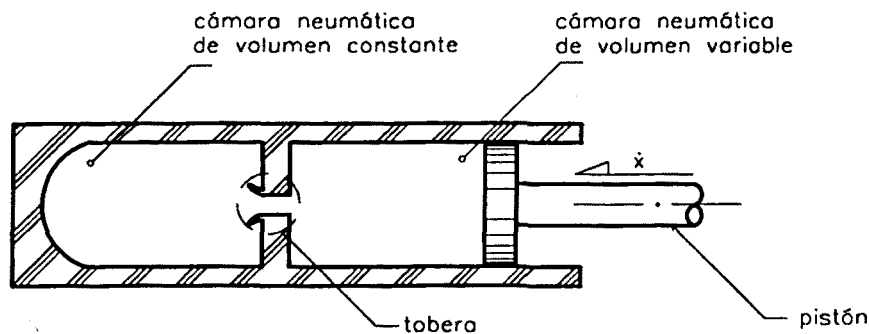


Figura IV.1 Sistema discontinuo con cámaras de volumen variable y constante

Cuando la suspensión está en reposo, todo el nitrógeno contenido en dichos depósitos está a la misma presión y temperatura, por lo que las características estáticas de la cámara neumática discontinua son idénticas a las de la simple. Es de esperar que, para desplazamientos lentos fuera de la posición estática, no se establezcan cambios que evidencien diferencias entre las propiedades de una u otra cámara, por lo que la ecuación [III.1] continuaría siendo una ley válida para relatar la evolución de la presión para cambios del volumen total.

La resistencia incluida por la tobera afecta al comportamiento normal del sistema al incluir un nuevo tiempo RC. De hecho, la denominación de sistema discontinuo indica que, admitiendo que el volumen de la tobera es diminuto comparado con el de las cámaras adyacentes, las variables de estado del gas sufren cambios bruscos al pasar de una cámara a otra. Como se hizo para la cámara simple, se supondrá que en cada una de las cámaras se cumplen los requisitos necesarios para admitir como válida la hipótesis de equilibrio local. De esta forma, no solo se puede calcular una propiedad extensiva integrando la intensiva correspondiente a lo largo y ancho del volumen de control como se hizo en [III.45], sino que se supone a la intensiva repartida de forma uniforme por el mismo<sup>1</sup>. En general, se admiten como válidas las hipótesis del capítulo anterior, y en particular, las que se desprendan del desarrollo siguiente.

En este capítulo se describen las leyes que resuelven, en función de las variables termodinámicas de cada una de las cámaras, el comportamiento dinámico del sistema al modificarse las características del flujo a través de la tobera que las conecta. Dada la conexión existente entre la generación irre-

---

<sup>1</sup> La existencia de gradientes de densidad y temperatura, ahora debidos no solo al movimiento del pistón sino también al flujo másico entre cámaras, indicarán el apartamiento del sistema del equilibrio. La irreversibilidad asociada a su presencia será computada con el correspondiente término de pérdida de trabajo útil, definido en función de magnitudes intensivas promediadas espacialmente.



versible que tiene lugar en dicho fenómeno, el índice politrópico instantáneo asociado y la rigidez dinámica de la suspensión, el método que se presenta conduce a todas luces a nuevos estudios y debates, abriendo inéditas áreas de actuación en el diseño de suspensiones hidroneumáticas.

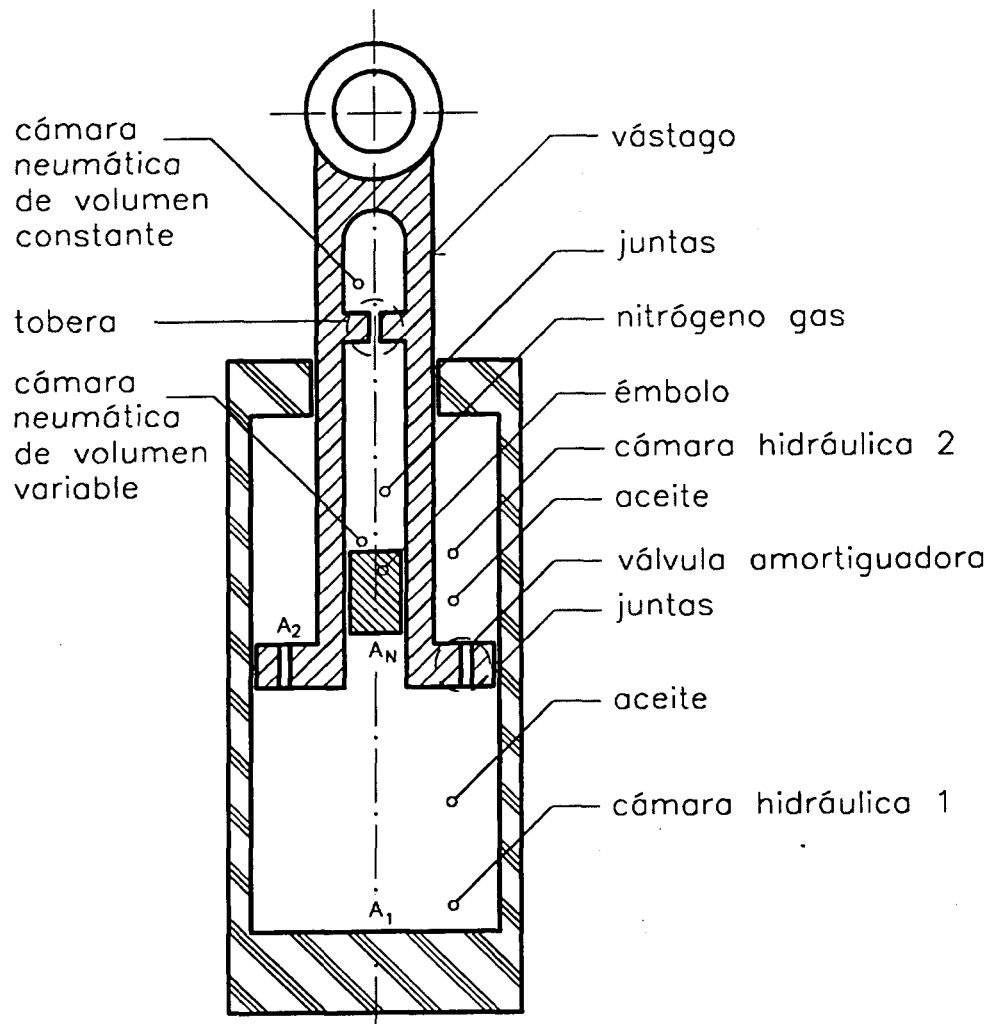


Figura IV.2 Cilindro de suspensión hidroneumática con cámara neumática discontinua

## IV.1 PRINCIPIOS Y FUNDAMENTOS

Cuando el cilindro de suspensión está formado por una cámara neumática simple, se ha explicado en el capítulo anterior cómo el proceso de compresión quedaba bien definido en función de las variables de estado termodinámico, siendo el índice politrópico instantáneo una medida directa de las irreversibilidades internas que se producían a una frecuencia, carrera y velocidad de compresión dadas. Como según I.5.2., el índice politrópico es proporcional a la rigidez neumática, la manipulación *externa* de las pérdidas irreversibles *internas* constituye un método para el gobierno de la rigidez dinámica de la suspensión y, por ende, de su frecuencia natural.

Si la anterior afirmación fuera cierta, y sin duda lo es, sería posible diseñar suspensiones que adaptaran no solo su ratio de amortiguación, como hasta la fecha ocurría con las *semi-activas*, sino también su rigidez instantánea a las circunstancias variables de trabajo, como son: el estado del terreno, la velocidad del vehículo, el grado de comodidad óptima exigible o el tipo de conducción deseado. Esto se haría además en tiempo real por la inclusión directa de las irreversibilidades internas en la ecuación [III.31]<sup>2</sup>, y evitaría la sustitución total del cilindro de suspensión pasivo por un elemento activo de elevado coste y consumo de potencia.

Los resultados que cabría esperar de un sistema tal, formado por un cilindro hidroneumático con control adaptativo de la rigidez y la amortiguación, estarían situados en la franja comprendida entre la suspensión *semi-activa* como hoy día es entendida, y la suspensión completamente activa, no suponiendo un coste en *software* muy superior a las primeras, y resultando menos complejas en *hardware* que las segundas.

---

<sup>2</sup> Se entiende de momento que se trata con una cámara simple. Se demostrará en el presente capítulo como esto es así también para la cámara neumática discontinua.

El método más sencillo, y por ello el más común, que se utiliza para variar el ratio de amortiguación de cualquier suspensión hidráulica, consiste en variar la sección de paso de la válvula amortiguadora en función de alguna estrategia de control más o menos complicada. Como la pérdida de energía útil que tiene lugar por unidad de tiempo cuando un caudal en volumen  $Q_v$ , de un fluido incompresible de densidad  $\rho$ , atraviesa un orificio es

$$\dot{W}_{irrev}^{flujos} = Q_v (p_1 - p_2) \quad [IV.1]$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  son las presiones medias efectivas a ambos extremos, resulta, que el control que se realiza se fundamenta en la regulación de la generación irreversible. Al ser el caudal  $Q_v$  una función conocida de la sección de paso de la vena fluida, es posible tener amortiguadores *semi-activos* tal como se describió por ejemplo en II.2.4.3.

La pérdida [IV.1] es interna al fluido, por lo que un planteamiento paralelo para la cámara neumática conduciría a creer que la regulación del flujo a través de la tobera en sistemas discontinuos contribuiría al control del politrópico instantáneo del proceso, y de este modo a la tutela de la rigidez asociada. Para avanzarse al fenómeno y poder predecir en qué manera se afecta al sistema al actuar sobre el flujo compresible, es necesario realizar un análisis previo de la termodinámica vinculada al fenómeno, que permita actualizar la ecuación [III.29] o la [III.31], de forma que se incluya el correspondiente término convectivo para cada cámara.

La cuantificación analítica de este nuevo planteamiento implica disponer de un algoritmo para el cálculo preciso del flujo másico en todo el rango de trabajo. En esta Tesis Doctoral se utiliza el modelo que propone la Norma ISO 6358 para componentes neumáticos según se explica en IV.3.

### IV.1.1 RELACIÓN ENTRE TRABAJOS

Es frecuente encontrarse con que los libros de termodinámica tratan extensamente la expansión libre del gas contenido a presión en un depósito en el vacío. Cuando la expansión es lo suficientemente rápida el proceso es adiabático, resultando entonces que la entalpía de remanso del gas<sup>3</sup> se mantiene constante. Esto es consecuencia directa de la aplicación del primer principio a una corriente, en la que se pueda despreciar el trabajo técnico y no hayan incrementos de cota de consideración, según se desprende de

$$(\delta q - \delta w)^{ext} = 0 = dh + cdc + d\psi \approx dh_o \quad [IV.2]$$

El flujo a través de la tobera de la suspensión de la Figura IV.2, aún teniendo semejanzas con un proceso de Joule-Thompson, es en algo diferente pues el régimen no será por lo general permanente, no siendo posible calcular las variables de salida de las de entrada con  $\Delta h_o = 0$ . La expansión del gas es controlada y contenida, dependiendo de las variables de las dos cámaras que comunica. Ambas cámaras tienen entidad suficiente como para no poderse admitir en principio que sus entalpías son iguales<sup>4</sup>.

Para hacer pasar el flujo a través del estrangulador se ha de vencer la resistencia local que éste supone, según se indica en el BondGraph de la Figura IV.3. El trabajo que se gasta en la impulsión se ha de transformar en calor pues constituye íntegramente la pérdida irreversible de energía disponible.

---

<sup>3</sup> La estrangulación adiabática es tal que  $\Delta h_o = 0$ . En un proceso de Joule-Thompson no se puede afirmar que la entalpía del gas se mantenga constante a través del estrangulador pues éste representa un estrechamiento de la sección de paso y, por tanto,  $cdc \neq 0$ . La energía cinética del flujo aumenta en el estrechamiento disminuyendo su entalpía. Cuando la sección vuelve a aumentar aguas abajo, la corriente se ralentiza restableciéndose de nuevo la entalpía inicial. El calor irreversible que se origina en el proceso es absorbido por el gas formando parte de la nueva entalpía.

<sup>4</sup> Sí se admite, en cambio, que la velocidad media del centro de masas del gas contenido en cada una sea nula.

#### IV.1.1.1 El trabajo de expansión $p dv$

En la cámara neumática simple de la Figura I.6 el trabajo de expansión coincidía con el trabajo frontera de la ecuación [III.14] pues, al ser  $m$  la masa contenida en el sistema, se cumplía que

$$pdV = m p dv \quad [IV.3]$$

En ausencia de trabajo frontera es posible también realizar trabajo de expansión sobre el gas sin más que permitir el intercambio de masa con el exterior. Siendo el volumen contenedor  $V$  constante, cualquier cambio en el volumen específico es consecuencia exclusiva de la aportación o extracción de masa. De hecho, el volumen  $V$  no es una propiedad innata al fluido compresible en un sistema abierto, sino más bien, su confín.

Se realiza trabajo de expansión sobre el gas cuando éste cambia su densidad. Dicho de otro modo, en una cámara que cambia de volumen a la vez que se le inyecta gas, es posible que el gas no realice expansión alguna si el aumento de masa es compensado por el aumento del volumen. El cambio del volumen específico debe relacionarse como

$$m dv = dV - v dm \quad [IV.4]$$

de donde, multiplicando por la presión del gas se llega a

$$m p dv = p dV - p v dm \quad [IV.5]$$

la cual indica que, en cada una de las cámaras del sistema discontinuo, el trabajo de expansión que realiza el gas al dilatarse es la suma del trabajo frontera [III.14] asociado al cambio del volumen contenedor, y del trabajo de impulsión debido al cambio de masa.

### IV.1.1.2 El trabajo de flujo $d(pv)$ , o de impulsión

El último término de la ecuación [IV.5] es el trabajo necesario para introducir un elemento de masa  $dm$  en una cámara a través de su superficie de control. Debe estar compuesto por la suma de dos términos: uno debido a la impedancia asociada a la tobera como discontinuidad para el flujo entre la cámara que lo empuja y la cámara que lo recibe; y otro correspondiente al trabajo que el gas contenido en ésta última realiza al intentar no cambiar de estado impidiendo la entrada de más masa. Si el flujo transcurre de la cámara (1) a la cámara (2), se tiene

$$p_1 v_1 dm = \delta W_{irrev}^{flujo} + p_2 v_2 dm \quad [IV.6]$$

El trabajo que consume una corriente para desplazar la unidad de masa una distancia diferencial es  $d(pv)$ . Este trabajo se extrae de la expansión del gas<sup>5</sup> en su fluir, representando la pérdida de energía útil como se observa de la ecuación [IV.6] para las condiciones reinantes en ambas cámaras neumáticas

**C**. El transporte irreversible es sólo una parte del flujo total de energía  $\dot{E}$  para el estrangulador **R**, según se deduce del BondGraph de la figura adjunta. Se admite, según lo explicado, que el flujo no absorbe calor del exterior.

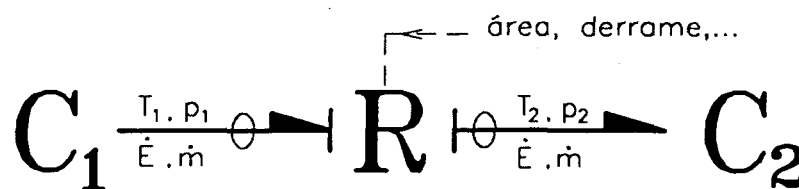


Figura IV.3 BondGraph para el flujo entre cámaras a través de un estrangulador adiabático.

<sup>5</sup> En general, este planteamiento es válido para cualquier fluido.

### IV.1.1.3 El trabajo de compresión $vdp$ , o disponible

El trabajo de impulsión es compañero inevitable de toda corriente por lo que, de todo el trabajo de expansión que el fluido, en este caso el flujo, realiza al expandirse, sólo está disponible aquella parte que queda después de descontar el trabajo de impulsión. Es decir, se dispone del término

$$-vdp = pdv - d(pv) \quad [IV.7]$$

que puede escribirse en forma integral como

$$-\int_{p_1}^{p_2} vdp = \int_{v_1}^{v_2} pdv - (p_2v_2 - p_1v_1) \quad [IV.8]$$

La denominación de *disponible* se entiende de lo que sigue. Combinando la ecuación de Gibbs [III.24] y la ecuación de la entropía [III.47], ambas por unidad de masa, con la ecuación del primer principio para sistemas abiertos [IV.2] en su forma más general, se tiene que

$$pdv = d(pv) + cdc + d\psi + \delta w^{ext} + |\delta q_{irrev}^{int}| \quad [IV.9]$$

que con [IV.7], conduce a

$$-vdp = cdc + d\psi + \delta w^{ext} + |\delta q_{irrev}^{int}| \quad [IV.10]$$

es decir, todos los trabajos que realiza la corriente se hacen a expensas del de expansión. El trabajo disponible de la ecuación [IV.10] puede ser usado para extraer trabajo técnico en turbinas, incrementar la cota del fluido en bombas, o acelerarlo en tuberías; siempre contando con la irreversibilidad presente que implica: un aumento del consumo o una reducción de la producción.

## IV.1.2 LA ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

Considerando el sistema discontinuo de la Figura IV.1 como sistema cerrado, el primer principio se escribe

$$\delta Q_{amb} - \delta W^{ext} = dU + dU_p \quad [IV.11]$$

donde

$$dU = dU_1 + dU_2 \quad [IV.12]$$

es el incremento de energía interna del gas contenido en las cámaras (1) y (2) respectivamente y,  $dU_p$ , continua siendo definido por la ecuación [III.22]. Teniendo en cuenta que ahora son dos las cámaras que intercambian calor por convección con la pared según [III.32], resulta que, tomando temperaturas medias

$$\delta Q_{Ois} = \delta Q_1^{ext} + \delta Q_2^{ext} = \left\{ \left[ m_1 c_{v1} \frac{\bar{T}_p - T_1}{\tau_1} \right] + \left[ m_2 c_{v2} \frac{\bar{T}_p - T_2}{\tau_2} \right] \right\} dt \quad [IV.13]$$

en la que debe cumplirse evidentemente<sup>6</sup> que

$$m_g = m_1 + m_2 \quad [IV.14]$$

El trabajo exterior  $\delta W^{ext}$  es realizado por el émbolo libre de la suspensión de la Figura IV.2, y viene definido de la ecuación [III.17]. Teniendo en cuenta que para el sistema discontinuo tomado  $dV = dV_1$  y  $dV_2 = 0$ , la ecuación de la energía para el gas del sistema considerado como cerrado queda, con [III.22], [III.23], [IV.12] y [IV.13], en la forma

---

<sup>6</sup> Se admite que la masa contenida en la tobera es ínfima en comparación a la de las cámaras, como corresponde a la hipótesis de discontinuidad.



$$dU_1 + dU_2 = \delta Q_1^{ext} + \delta Q_2^{ext} - p_1 dV_1 + |\delta W_{irrev}^{mov}| \quad [IV.15]$$

Cada una de las cámaras por separado es, en cambio, un sistema abierto comunicado con la otra por la tobera, a través de la cual es posible el intercambio de masa y de energía en forma de calor por convección, conducción y radiación<sup>7</sup>.

La energía interna<sup>8</sup> de cada cámara incluye dos términos según

$$dU_1 = m_1 du_1 + u_1 dm_1 \quad [IV.16]$$

$$dU_2 = m_2 du_2 + u_2 dm_2 \quad [IV.17]$$

ecuaciones por las que [IV.15] se transforma en

$$m_1 du_1 + m_2 du_2 + (u_2 - u_1) dm = \delta Q_1^{ext} + \delta Q_2^{ext} - p_1 dV_1 + |\delta W_{irrev}^{mov}| \quad [IV.18]$$

para la que se toma al flujo másico positivo cuando circula de (1) a (2), es decir,

$$0 < \dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} \quad [IV.19]$$

---

<sup>7</sup> La transferencia neta de calor por conducción y radiación, aunque escasa pues las temperaturas de ambas cámaras no se distancian de forma significativa en condiciones normales de trabajo, debe tenerse en consideración para permitir que el sistema alcance el equilibrio térmico en reposo, además del mecánico. Este último queda garantizado con la igualdad de las presiones de ambas cámaras, no siendo condición suficiente para hablar de equilibrio total. Véase IV.1.2.3 para un desarrollo más extenso de este concepto.

<sup>8</sup> Como se hizo en el capítulo anterior se sigue despreciando la energía cinética y potencial del centro de masas del gas.

### IV.1.2.1 Carga de depósitos de volumen variable

La ecuación [IV.18] tiene carácter global para el sistema discontinuo motivo de estudio, pero no permite tratar por separado ambas cámaras neumáticas de forma que se evalúen las propiedades mecánicas de la suspensión en función de las variables termodinámicas de cada una. La rigidez neumática es función de la presión existente en la cámara variable, por lo que se hace necesario estimarla bajo las diferentes condiciones de funcionamiento.

En general, cuando una cámara de volumen cambiante (1) está recibiendo masa del exterior donde reinan unas condiciones de estado  $\langle T_2, p_2, v_2, s_2 \rangle$ , la aplicación de la ecuación de la energía, teniendo presente [IV.16] y con el criterio de signos adoptado en [IV.19], indica que

$$m_1 du_1 - u_1 dm = \delta Q_1^{ext} + \delta Q_2^{int} - p_1 dV_1 + |\delta W_{irrev}^{mov}| - u_2 dm - p_2 v_2 dm \quad [IV.20]$$

donde  $\delta Q_2^{int}$  es el calor conducido o irradiado que llega al depósito a través de la tobera proveniente del exterior<sup>9</sup>,  $-u_2 dm < 0$ , es el calor de convección transportado con el flujo por el diferencial de masa de energía específica  $u_2$ , y,  $-p_2 v_2 dm > 0$ , es el trabajo de impulsión, según IV.1.1.2, que el exterior (2) realiza sobre el gas contenido en la cámara (1).

Con la ecuación [IV.5] y la [IV.6], pasando de la anterior a la derecha el segundo término de la izquierda, [IV.20] se puede arreglar en la forma

$$m_1 du_1 = \delta Q_1^{ext} + \delta Q_2^{int} + |\delta W_{irrev}^{mov}| - m_1 p_1 dv_1 + (h_1 - h_2) dm \quad [IV.21]$$

---

<sup>9</sup> La definición de exterior aquí puede parecer un poco confusa. Entiéndase que este calor provendrá de la otra cámara neumática por lo que es, de hecho, interior al conjunto, aunque exterior a la cámara. No figura en la ecuación [IV.15] como corresponde a la aplicación del primer principio, sí haciéndolo el calor  $\delta Q_1^{ext}$  comunicado con la pared.

en la que aparece el trabajo de expansión y el flujo neto de entalpía de (1) a (2) definido de

$$(h_1 - h_2)dm = (u_1 - u_2)dm + (p_1v_1 - p_2v_2)dm \quad [IV.22]$$

#### IV.1.2.2 Descarga de depósitos de volumen variable

El proceso de descarga de un depósito pudiera parecer una consecuencia directa del anterior desarrollo, mas desde un punto de vista físico existe poca similitud en las relaciones que resultan de aplicar el principio de conservación de la energía al caso, pues en la descarga no se realiza mezclado alguno en el interior del depósito entre el gas de éste y el del exterior.

Despreciando de nuevo las energías cinética y potencial del gas contenido así como de la masa que escapa, la aplicación del principio de conservación de la energía conduce a

$$m_1 du_1 - u_1 dm = \delta Q_1^{ext} + \delta Q_2^{int} - p_1 dV_1 + |\delta W_{irrev}^{mov}| - u_1 dm - p_1 v_1 dm \quad [IV.23]$$

en donde ahora  $dm > 0$  según [IV.19]. El trabajo de impulsión que el gas realiza es negativo pues se expulsa masa del volumen de control con  $-u_1 dm < 0$ .

De nuevo con la ecuación [IV.5] se pueden combinar el trabajo frontera y el de impulsión para mostrar de forma explícita el trabajo de expansión realizado. Tras agrupar y simplificar convenientemente, queda

$$m_1 du_1 = \delta Q_1^{ext} + \delta Q_2^{int} + |\delta W_{irrev}^{mov}| - m_1 p_1 dv_1 \quad [IV.24]$$

Debe tenerse precaución con el criterio de signos que se escoja para la transmisión de calor pues, aunque si bien el que se intercambia con la pared es definido siempre positivo cuando lo recibe el gas de [IV.13], el interior, cuando para una cámara es positivo para la otra lo es negativo y viceversa.